2007RP-07

Principes de choix d'une méthode économique d'allocation

Partage des coûts et tarification à Gaz de France

Marcel Boyer, Nicolas Marchetti

Rapport de projet
Project report

Montréal
Mai 2007

CIRANO
Allier savoir et décision

Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations

CIRANO

Le CIRANO est un organisme sans but lucratif constitué en vertu de la Loi des compagnies du Québec. Le financement de son infrastructure et de ses activités de recherche provient des cotisations de ses organisations-membres, d'une subvention d'infrastructure du Ministère du Développement économique et régional et de la Recherche, de même que des subventions et mandats obtenus par ses équipes de recherche.

CIRANO is a private non-profit organization incorporated under the Québec Companies Act. Its infrastructure and research activities are funded through fees paid by member organizations, an infrastructure grant from the Ministère du Développement économique et régional et de la Recherche, and grants and research mandates obtained by its research teams.

Les partenaires du CIRANO

Partenaire majeur
Ministère du Développement économique,
de l'Innovation et de l'Exportation

Partenaires corporatifs
Alcan inc.
Banque de développement du Canada
Banque du Canada
Banque Laurentienne du Canada
Banque Nationale du Canada
Banque Royale du Canada
Banque Scotia
Bell Canada
BMO Groupe financier
Bourse de Montréal
Caisse de dépôt et placement du Québec
DMR Conseil
Fédération des caisses Desjardins du Québec
Gaz de France
Gaz Métro
Hydro-Québec
Industrie Canada
Investissements PSP
Ministère des Finances du Québec
Raymond Chabot Grant Thornton
State Street Global Advisors
Transat A.T.
Ville de Montréal

Partenaires universitaires
École Polytechnique de Montréal
HEC Montréal
McGill University
Université Concordia
Université de Montréal
Université de Sherbrooke
Université du Québec
Université du Québec à Montréal
Université Laval

Le CIRANO collabore avec de nombreux centres et chaires de recherche universitaires dont on peut consulter la liste sur son site web.

ISSN 1499-8610 (Version imprimée) / ISSN 1499-8629 (Version en ligne)

Partenaire financier

Développement économique, Innovation et Exportation
Québec

PRINCIPES DE CHOIX D’UNE MÉTHODE D’ALLOCATION

PARTAGE DES COÛTS ET TARIFICATION À GAZ DE FRANCE

Marcel Boyer

Professeur Titulaire, Chaire Bell Canada en économie industrielle
Département de sciences économiques de l’Université de Montréal
Fellow CIRANO, CIREQ, C.D. Howe Institute

Nicolas Marchetti

Chercheur Postdoctoral CIRANO

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE EXÉCUTIF

La plupart des organisations, sinon toutes, répartissent d'une manière ou d'une autre des coûts communs entre leurs diverses composantes ou encore entre leurs différents partenaires ou clients. La rentabilité de l'entreprise, la performance de l'organisme public, le succès du partenariat recherché dépendent en grande partie de la « qualité » des règles de partage des coûts communs mises en place. En dépit de cette réalité, et bien que leur analyse scientifique explicite soit déjà relativement avancée, leur application au sein des organisations reste relativement embryonnaire et souvent tributaire d'une approche historique ad hoc, plutôt que rationnellement choisie pour maximiser la performance et la valeur de l'organisation. Pour bien cerner toute la complexité du problème, l'étude des caractéristiques de ces méthodes repose nécessairement sur une certaine dose de représentation mathématique et ce, afin d'en simplifier l'analyse. C'est là le « prix à payer » pour gagner en compétitivité et performance en présence de problèmes complexes.

Gaz de France n'échappe pas à la règle et doit faire face au défi du partage de coûts communs. L'approvisionnement, l'entrée sur le réseau de transport ou encore le stockage sont autant de coûts non attribuables qu'il faut partager entre les groupes de clients. La problématique de Gaz de France ne se limite pas uniquement au partage de ces coûts mais s'étend jusqu'à la couverture de ces derniers par la tarification. Coupler partage des coûts et tarification, deux concepts intimement liés, tel est le réel défi auquel Gaz de France est confronté. La différence fondamentale entre ces deux problématiques peut être comprise comme suit : dans un problème pur de partage des coûts, on considère généralement que la demande exprimée par l'ensemble des partenaires est donnée alors que dans un problème type de tarification, la demande est considérée comme sensible au tarif. Dans le contexte spécifique de Gaz de France, nous percevons le couplage entre le partage des coûts et la tarification comme suit. Gaz de France supporte divers coûts pour fournir du gaz à ses clients. Ces coûts se partagent en coûts attribuables à un client ou groupe de clients donné et en coûts communs, i.e. non attribuables. Au cours d'une première étape les coûts communs doivent être répartis, à l'aide d'une méthode appropriée de partage des coûts, entre les divers groupes de clients identifiés. Une fois cette première étape franchie, on passe à la phase de tarification. Au cours de cette seconde étape, il faut récupérer pour chaque groupe de clients l'ensemble des coûts attribués à ce groupe. Les coûts attribuables au départ peuvent souvent être récupérés par une tarification au coût marginal (sauf cas exceptionnels). Les coûts communs attribués, lors de la première étape, aux divers groupes pourront être récupérés grâce à des écarts de prix par rapport aux coûts marginaux qui eux seront calculés de manière à minimiser les distorsions de consommation par rapport aux quantités « optimales » obtenues (calculées ou prédites) par une tarification au coût marginal. L'objectif de rentabilité pourra quant à lui être rencontré par un ajustement approprié (proportionnel) de ces écarts entre prix et coût marginal.

Le présent rapport vise à définir et présenter divers outils pour aider le décideur à faire les meilleurs choix possibles, selon l'objectif poursuivi, au cours de chacune des deux étapes exposées ci-dessus. Il débouche également sur des pistes d'analyse des problèmes inédits que soulève le couplage explicite et intégré du partage de coûts et de la tarification. L'objectif de ce rapport n'est pas de conclure sur une recommandation d'un couple spécifique (méthode de partage de coûts, méthode de tarification) qui serait le plus à même d'embrasser les contraintes et objectifs de Gaz de France. En effet, afin d'aboutir à ce type de conclusions, les recherches devront être approfondies en tenant compte par exemple des informations disponibles ou encore de la forme des fonctions de coût et de demande. Nous insistons cependant dès à présent sur le fait que le choix d'une méthode de partage de coûts doit se faire sur la base de ses propriétés. Il est contre-indiqué de choisir une méthode sur la simple base d'un seul ou même de quelques exemples, comme le font traditionnellement les organisations ou consortiums, à la suite de longues et souvent difficiles négociations entre les parties, chacune d'elles privilégiant évidemment la méthode qui lui est la plus favorable. Nous soulignons le fait qu'il est beaucoup plus simple et logique d'identifier une méthode parmi l'ensemble des méthodes possibles sur la base des propriétés de ces méthodes, avant même de connaître les résultats qu'elles peuvent donner dans des applications concrètes précises.

Nous croyons que Gaz de France aurait intérêt à investir des ressources dans l'apprentissage de méthodes de partage de coûts communs et de tarification plus rigoureuses, plus efficaces, plus équitables et plus incitatives que celles couramment utilisées. La problématique soulevée est complexe. Elle ne doit pourtant pas être éludée au risque de perdre en compétitivité et performance.

RAPPORT SYNTHÉTIQUE

Introduction

La plupart des organisations, sinon toutes, répartissent d'une manière ou d'une autre des coûts communs entre leurs diverses composantes ou encore entre leurs différents partenaires ou clients. Gaz de France n'échappe pas à la règle. En effet, pour fournir du gaz à ses clients finals, Gaz de France est confronté à divers coûts dont certains ne sont pas directement attribuables à un client donné. Il s'agit par exemple des coûts liés à :

- l'approvisionnement : contrats négociés auprès des producteurs ou intervention sur des marchés spots ;
- l'accès au réseau de transport et de distribution ;
- l'accès à des capacités de stockage pour faire face aux fluctuations saisonnières de la demande de ces clients.

Il convient cependant de récupérer ces coûts. La question qui se pose est alors la suivante : comment déterminer la part que chaque client ou groupe de clients doit supporter et quel mécanisme (tarification) utiliser pour récolter la part de chacun ? La compétitivité et la performance de Gaz de France dépendent, pour une part non négligeable, de la qualité de la méthode de partage des coûts et de la méthode de tarification qui seront mises en place. Notons dès à présent que la problématique soulevée par Gaz de France implique le rapprochement novateur de deux considérations différentes mais intimement liées : le partage des coûts communs et la tarification. L'objet du présent rapport est de rendre les méthodes de partage de coûts et de tarification plus accessibles et d'en démontrer la puissance en termes d'analyse. Il consiste également à suggérer les premières pistes de recherche dans le domaine novateur du couplage méthode de partage de coûts / méthode de tarification.

Les méthodes de partage des coûts communs et de tarification développées depuis quelques années constituent des outils puissants qui permettent de répondre de manière rigoureuse à la question soulevée plus haut. Cependant, bien que l'analyse scientifique de ces méthodes soit déjà relativement avancée, leur application au sein des organisations (entreprises, alliances ou réseaux d'entreprises, gouvernements) reste relativement embryonnaire et souvent tributaire d'une approche historique ad hoc, plutôt que rationnellement choisie pour maximiser la performance et la valeur de l'organisation. Il faut reconnaître que l'analyse de ces méthodes exige une certaine dose de mathématiques pour représenter de la manière la plus fidèle possible les principes (équité, cohérence, efficacité) et les propriétés (insensibilité aux unités de mesure, traitement égalitaire des égaux…) souhaitables des méthodes considérées, pour vérifier les liens entre méthodes et propriétés, principes et caractéristiques, et pour traduire, dans un langage rigoureux et programmable, les contraintes institutionnelles et les objectifs poursuivis.

Le présent rapport vise à définir et présenter divers outils pour aider le décideur à faire les meilleurs choix possibles, selon l'objectif poursuivi, en matière de méthode de partage de coût et de tarification. Il débouche également sur des pistes d'analyse des problèmes inédits que soulève le couplage explicite et intégré du partage de coûts et de la tarification. L'objectif de ce rapport n'est pas de conclure sur une recommandation d'un couple spécifique (méthode de partage de coûts, méthode de tarification) qui serait le plus à même d'embrasser les contraintes et objectifs de Gaz de France. En effet, afin d'aboutir à ce type de conclusions, les recherches devront être approfondies en tenant compte par exemple des informations disponibles ou encore de la forme des fonctions de coût et de demande.

Nous insistons cependant dès à présent sur le fait que le choix d'une méthode de partage de coûts doit se faire sur la base de ses propriétés. Il est contre-indiqué de choisir une méthode sur la simple base d'un seul ou même de quelques exemples, comme le font traditionnellement les organisations ou consortiums, à la suite de longues et souvent difficiles négociations entre les parties, chacune d'elles privilégiant évidemment la méthode qui lui est la plus favorable. Nous soulignons le fait qu'il est beaucoup plus simple et logique de choisir une méthode parmi l'ensemble des méthodes possibles sur la base des propriétés de ces méthodes et de leurs capacités de rencontrer les principes retenus et les objectifs poursuivis, avant même de connaître les résultats qu'elles peuvent donner dans des applications concrètes précises.

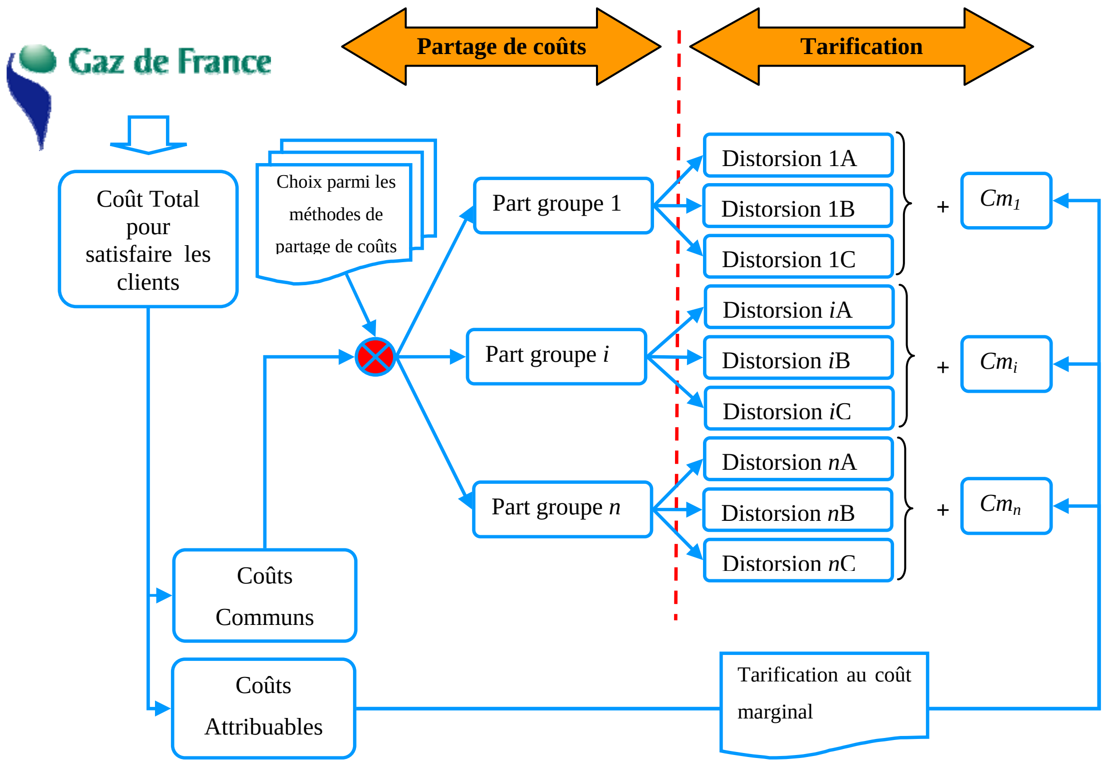
Ce rapport synthétique comprend trois sections. Nous décrivons tout d'abord brièvement la problématique à laquelle Gaz de France est confronté. La solution que nous proposons est décomposable en deux étapes : partage des coûts et tarification. Ces deux étapes font l'objet des sections RS.2 et RS.3 ci-dessous.

RS.1 Le contexte d'application

Le problème de partage des coûts qui nous a été décrit dans le cahier des charges *réf. M.DEG.E2S.2005.518-OME/CJA* est le suivant :

> Un négociant gazier verticalement intégré (en l'occurrence Gaz de France) supporte des coûts pour fournir du gaz à ses clients finals. *« […] En effet, un négociant mobilise des contrats d'approvisionnements négociés auprès des producteurs ou intervient sur des marchés spots, un accès aux réseaux de transport et de distribution ainsi que des capacités de stockage pour faire face aux fluctuations saisonnières de la demande de ces clients. Parmi ces coûts, une part prépondérante n'est pas directement attribuable à un client donné, il s'agit des coûts d'approvisionnement, d'entrée sur le réseau de transport et des coûts de stockage. Les coûts relatifs au transport et au stockage sont déterminés par des tarifs régulés que les gestionnaires d'infrastructures appliquent ; ils sont donc identiques quelle que soit la nature de celui qui sollicite l'accès à l'infrastructure »*.

Dans ce contexte, le projet MECONG a pour objectif de proposer des outils permettant d'allouer les coûts communs supportés par le négociant gazier. Cette problématique implique, à notre sens, le rapprochement novateur de deux considérations différentes mais intimement liées : le partage des coûts communs et la tarification. Nous envisageons ce rapprochement de la façon décrite ci-dessous et illustrée dans la figure suivante.



Cette figure s'interprète de la manière suivante. Gaz de France supporte divers coûts pour satisfaire ses clients. Ces coûts se partagent en coûts communs (au départ non attribuables) et coûts attribuables ou spécifiques.

Au cours d'une première étape (à gauche de la ligne en pointillés), les coûts communs sont répartis, à l'aide d'une méthode appropriée de partage des coûts, entre les divers groupes de clients identifiés.

Une fois cette étape franchie, on passe à la phase de tarification (à droite de la ligne en pointillés). Il convient au cours de cette étape de récupérer, pour chaque groupe de clients, l'ensemble des coûts attribués à ce groupe. À ce stade, chaque groupe de clients sera possiblement scindé en plusieurs catégories et le processus de tarification pourra être affiné davantage. Les coûts qui étaient attribuables au départ peuvent souvent être récupérés par une tarification au coût marginal (sauf cas exceptionnels). Les coûts communs attribués, lors de la première étape, aux divers groupes de clients pourront être récupérés grâce à des écarts de prix par rapport aux coûts marginaux qui eux seront calculés de manière à minimiser les distorsions de consommation par rapport aux quantités optimales obtenues (calculées ou prédites) par une tarification au coût marginal. Ce phénomène est représenté par les trois distorsions (catégories) illustrées pour chaque groupe dans la figure ci-dessus. L'objectif de rentabilité pourra quant à lui être rencontré par un ajustement approprié (proportionnel) de ces écarts entre prix et coût marginal.

Divers types de tarifs peuvent alors être employés pour que chaque groupe finance la part des coûts communs qui lui a été attribuée.

RS.2 Étape 1 : le partage des coûts

La première étape de la procédure que nous proposons consiste à attribuer une part des coûts communs à chaque entité ou (grand) groupe de clients. Quelles sont les méthodes de partage des coûts à disposition du décideur ? Comment choisir parmi l'ensemble des méthodes connues ?

RS.2.1 Les méthodes de répartition

On peut distinguer trois grandes classes de méthodes de répartition des coûts. Elles font l'objet des trois paragraphes qui suivent.

Les règles de proportionnalité

Ces méthodes consistent à répartir la totalité ou une partie des coûts selon une règle de proportionnalité, à partir de critères plus ou moins ad hoc. Elles sont parfois motivées par certaines considérations éthiques. On peut multiplier à l'infini ce genre de méthodes en variant la partie des coûts qui font l'objet de la répartition proportionnelle et les critères de cette répartition. Ce sont les plus anciennes de toutes les méthodes de répartition et sans doute celles qui sont encore le plus utilisées. Plusieurs raffinements de ces méthodes ont été suggérés dans des revues de comptabilité, d'où leur vocable de « règles comptables ».

La règle des coûts moyens. Il s'agit sans doute de la méthode la plus répandue et la plus simple. Elle s'applique à la classe générale de problèmes où les demandes sont homogènes et représentées par des nombres non-négatifs. Elle consiste à répartir les coûts totaux ou une partie des coûts selon les quantités demandées. De façon mécanique, chaque entité paie donc un montant qui est le produit de sa demande et du coût moyen.

La méthode des bénéfices résiduels. Cette méthode a été proposée pour répartir les coûts des bassins hydrauliques à usages multiples. Son origine remonte aux travaux de la Tennessee Valley Authority en 1938, bien que cette agence se défendait bien à l'époque de vouloir utiliser une « formule mathématique ». La méthode des bénéfices résiduels est un raffinement de celle que cette agence avait conçue pour son propre usage. Elle consiste à faire payer à chaque entité son coût de faire cavalier seul et à redistribuer le surplus ainsi généré au prorata des différences entre coûts de faire cavalier seul et coûts incrémentaux. D'aucuns y ont vu la recherche d'une forme d'équité, ce qui n'est pas évident.

Les méthodes comptables. Entre 1975 et 1981, on a vu apparaître des propositions de méthodes de répartition proportionnelle dans des revues de comptabilité. On en recense deux ici. La première a été proposée par Shane Moriarity en 1975. Elle consiste à faire payer à chaque entité une contribution de base égale au plus petit des montants entre son coût de faire cavalier seul d'une part et la somme de son coût attribuable augmenté des coûts communs d'autre part. Le surplus alors généré est redistribué au prorata des contributions de base. La méthode de Moriarity peut imputer à une entité une contribution inférieure à la partie du coût dont elle est directement responsable. Il résulte de cette possibilité que les autres entités peuvent avoir intérêt à exclure l'entité subventionnée et à réaliser seules le projet, même en supposant que les coûts communs vont rester inchangés après l'exclusion. Pour remédier à ce défaut (inefficacité) de la méthode de Moriarity, Joseph G. Louderback a proposé en 1976 de modifier cette dernière et de faire supporter une grande partie des coûts communs par ceux qui semblent gagner le plus de la réalisation conjointe du projet. La méthode de Louderback élimine ainsi les subventions d'une entité par une autre et aucun sous-ensemble d'entités n'aura intérêt à exclure les autres du projet global.

Les méthodes inspirées de la théorie des jeux coopératifs

La deuxième catégorie de méthodes est inspirée de la théorie des jeux coopératifs. Un jeu coopératif est une situation où plusieurs agents interagissent en se concurrençant tout en voulant collaborer entre eux : chacun veut profiter au maximum des gains de la coopération sans pour autant la remettre en cause.

La tarification au coût marginal. On connaît l'importance que les économistes attachent à la tarification au coût marginal. La dernière unité d'un bien ou service devrait être vendue à un prix égal à la valeur des ressources supplémentaires requises pour sa production. La tarification au coût marginal consiste donc à demander à chaque entité un montant égal au produit de sa quantité demandée et du coût additionnel qu'entraîne la dernière unité demandée, en supposant fixées les demandes des autres entités. C'est une règle qui doit être respectée pour maximiser le profit dans un contexte de concurrence parfaite. Ce mode de tarification pose cependant problème puisqu'il entraîne généralement un surplus ou un déficit et ne résout pas a fortiori le problème de la répartition du coût total dans des contextes plus généraux.

La tarification à la Aumann-Shapley. Robert J. Aumann[1] et Lloyd Shapley ont proposé en 1974 une solution élégante au problème du surplus ou du déficit qu'implique la tarification au coût marginal. La méthode Aumann-Shapley consiste, non pas à tarifer toutes les unités au coût marginal de la dernière unité demandée comme c'est le cas lors de la tarification au coût marginal, mais à tarifer chaque unité consommée à son coût marginal le long d'un sentier décomposant la consommation totale en unités incrémentales et menant à cette dernière. On peut montrer qu'en tarifant les diverses entités en faisant la somme des coûts marginaux de leur consommation le long du sentier en question, il n'y aura ni surplus ni déficit.

[1] Robert J. Aumann est lauréat 2005 du prix Nobel d'économie pour ses travaux en théorie des jeux.

La méthode Shapley-Shubik. Parmi les règles de répartition proposées pour les jeux coopératifs, la plus fréquemment utilisée est celle qu'a définie Lloyd Shapley en 1953, connue sous le nom de *valeur de Shapley*. On donne le nom de Shapley-Shubik à cette méthode parce que c'est l'économiste Martin Shubik qui en 1962 a proposé de l'appliquer à la répartition des coûts. Elle peut être présentée de manière intuitive comme suit : supposons qu'on ordonne les joueurs d'une certaine façon et qu'on fasse payer au premier le coût entier de ses besoins en supposant qu'il est seul, et au deuxième le coût additionnel (incrémental) imposé par ses besoins, en supposant que seuls ces deux partenaires participent au consortium. Et ainsi de suite, s'il y a plus de deux partenaires. On répartirait alors le coût total de tous les besoins. Une telle répartition est dite répartition selon les coûts incrémentaux. Elle correspond à un ordonnancement donné des partenaires. Certains joueurs pourraient évidemment se plaindre de l'ordre choisi ; par exemple, le premier usager serait appelé à supporter des coûts importants liés au démarrage du projet, alors que le dernier ne se verrait imputer que des coûts minimes correspondant au simple coût marginal de ses besoins. Le mathématicien Lloyd Shapley a trouvé une réponse élégante à ce problème. Elle consiste à considérer tous les ordres possibles entre les usagers et à prendre comme répartition finale des coûts la moyenne des coûts incrémentaux. Les usagers sont ainsi tous traités de façon symétrique. Certains voient ce mode de répartition comme celui qui pourrait résulter d'une négociation entre les entités.

Le nucléole. En 1969, David Schmeidler introduit le concept du nucléole dont l'idée est de maximiser le bien-être de la moins heureuse ou favorisée des coalitions, entités ou groupe d'entités. Notons que ce concept est relativement complexe à manipuler et que son application souffre d'un besoin important en efforts de calcul.

Le cœur (noyau). Le cœur n'est pas en soi une méthode de répartition puisqu'il détermine plutôt un ensemble de répartitions des coûts, qui peut d'ailleurs être vide. Il s'agit des répartitions qu'aucune coalition ou sous-ensemble d'entités ne peut contester sous prétexte de surfacturation. Il y aurait surfacturation si une méthode de répartition imputait aux membres d'une coalition une charge supérieure au coût auquel la coalition en question pourrait seule satisfaire aux demandes de ses membres. Le fait d'appartenir au cœur confère à une répartition un caractère de crédibilité non négligeable. Le nucléole appartient au cœur lorsque celui-ci existe et la valeur de Shapley (la répartition obtenue par la méthode Shapley-Shubik) appartient au cœur pour les jeux de coûts concaves, i.e. ceux où les coûts incrémentaux de joindre un sous-ensemble d'entités décroît à mesure que ce sous-ensemble augmente en taille.

La répartition séquentielle

La troisième catégorie de méthodes est beaucoup plus récente. Elle comprend les règles dites de répartition séquentielle (serial cost sharing) proposées pour la première fois par Scott Shenker en 1990. Elles ont fait l'objet d'une abondante littérature depuis et sont applicables dans un contexte unidimensionnel comme multidimensionnel. Le principe de construction étant similaire dans ces deux contextes, nous ne présentons ici que le cas de demandes unidimensionnelles.

Dans un premier temps toutes les entités se voient imputer une part égale du coût d'un projet tout juste suffisant pour répondre aux besoins de l’ensemble des entités lorsque leurs demandes ont toutes été ramenées au niveau de la plus faible d’entre elles. La contribution de l’entité est alors fixée et cette entité « disparaît » de la suite du problème de partage des coûts. Dans un second temps, les entités restantes se voient imputer, en plus de la part déjà calculée, une part égale de l'accroissement de coût qu'entraînerait un accroissement de capacité suffisant pour répondre à des demandes de leur part qui seraient toutes égales à celle de la nouvelle entité disposant de la demande la plus faible. On continue ainsi à imputer les coûts associés à des accroissements de capacité nécessités par des demandes de plus en plus grandes. Dans le cas où les coûts incrémentaux croissent avec l'ampleur des demandes, on évite ainsi que les entités ayant des demandes plus faibles se voient imputer des coûts reliés aux externalités imposées par ceux qui ont des demandes plus fortes. À l'inverse, si les coûts incrémentaux diminuent avec l'ampleur des demandes, on évite que les entités ayant des demandes plus faibles profitent des externalités générées par les entités qui ont des demandes plus grandes.

RS.2.2 Les principes et propriétés souhaitables des méthodes de partage de coûts

Confronté au nombre élevé de méthodes de partage des coûts communs, le choix de l'une d'entre elles peut s'avérer complexe. Comment effectuer ce choix dans les meilleures conditions ?

Pour un décideur, la tentation pourrait être forte de choisir une méthode sur la base d'un seul ou même de plusieurs exemples ou sur la base des répartitions qu'elle peut donner dans une situation particulière. C'est malheureusement trop souvent la façon de faire. Il en résulte inévitablement des frustrations et des conflits. Idéalement, il faut choisir une méthode à partir d'une comparaison des propriétés des différentes méthodes et de leurs capacités respectives de rencontrer les principes retenus et les objectifs poursuivis, avant même de connaître les résultats qu'elles peuvent donner dans des applications concrètes précises. Un peu comme un pays se dote d'une constitution sans connaître toutes les répercussions qu'elle aura sur les citoyens actuels et à venir. Les propriétés seules, traduction formelle d'idées relativement simples, peuvent cependant ne pas convenir aux gestionnaires soucieux de fonder leur choix, et accessoirement de les défendre, sur la base de critères plus généraux. L'utilisation de principes est alors une solution envisageable. Un recours aux principes a le double avantage qu'ils existent en nombre limité et qu'ils trouvent écho chez la plupart des citoyens. L'inconvénient majeur est qu'il est possible d'associer plusieurs définitions à un seul et même principe. Notons cependant que principes et propriétés sont intimement liés. Il est en effet possible d'associer à chaque propriété un ou plusieurs principes. Les principes ayant un caractère plus général que les propriétés, nous nous intéressons dans un premier temps à ces derniers.

Au sein de cette étude trois principes ont été retenus : l'*équité*, la *cohérence* et l'*efficacité/efficience*. Le principe d'efficacité/efficience correspond à la recherche de critères rationnels de performance lors de la définition et de la mise en œuvre du partage des coûts et de la tarification. L'efficacité est le rapport entre les résultats obtenus et les objectifs visés. Il ne faut pas confondre ce concept avec l'efficience qui est le rapport entre les résultats obtenus et les ressources utilisées pour les atteindre. L'équité et la cohérence peuvent être considérées comme des contraintes qui doivent être vérifiées pour garantir le succès d'une nouvelle pratique tarifaire. D'autres principes peuvent aussi être considérés tels les principes de légalité ou de transparence.

Dans son acception générale, le terme « équité » désigne la qualité de ce qui est juste et impartial. Le problème avec le sentiment d'équité est que la perception qu'en ont les consommateurs en est très subjective. Une différence est parfois vue comme légitime, parfois comme illégitime, quelle que soit son objectivité. Cela résulte de la diversité des définitions possibles de l'équité. Soulignons le fait que bien que les concepts d'équité ne soient ni bons, ni mauvais, les méthodes utilisées pour le suivi et la poursuite de l'équité peuvent s'avérer plus ou moins cohérentes et générer des distorsions par rapport à une solution efficace ou efficiente.

Compte tenu des informations dont nous disposons, le principe d'équité correspondrait ici au concept d'équité horizontale qui établit que ceux qui sont dans des conditions identiques ou similaires doivent être traités de manière identique ou similaire. Nous discernerons autant de concept d'équité horizontale qu'il existe de significations du terme « similaire ». Le concept d'équité verticale qui traduit pour sa part l'idée d'une redistribution ne sera pas abordé dans ce rapport. En effet, les méthodes de partage de coûts sont d'abord et avant tout un outil de répartition des coûts et non de redistribution. L'aspect redistributif n'intervient qu'une fois la méthode de partage des coûts implémentée et uniquement si la solution obtenue s'avérait difficilement applicable. Dans ce cas on tentera de la rendre acceptable en minimisant certaines distorsions par rapport à la solution « première ».[2]

[2] La solution première est ici celle qui a été obtenue par la méthode de partage des coûts choisie au départ par l'ensemble des entités.

La cohérence est un principe qui garantit que le partage des coûts se fera de manière harmonieuse, logique, c'est-à-dire exempt de toute sorte de contradictions.

Le principe d'efficacité/efficience peut, au même titre que le principe d'équité, souffrir de multiples définitions. Ainsi, une méthode de partage de coûts est efficace si elle permet de rencontrer l'objectif initial et elle est efficiente si les ressources utilisées correspondent au minimum nécessaire pour l'atteinte de cet objectif. Dans le cadre de cette prestation nous ne connaissons pas les objectifs visés par Gaz de France du fait de son statut de Société Anonyme soumise à une mission de service public. Il nous est par conséquent difficile de définir pleinement le principe d'efficacité. Notons cependant que l'efficacité est souvent associée aux concepts de participation et d'incitation.

Intéressons-nous à présent aux propriétés souhaitables des méthodes de partage de coûts. Ces dernières, à l'inverse des principes, sont des concepts rigoureux qui ne souffrent pas de multiples définitions. Elles peuvent être regroupées en sept catégories. A titre d'illustration nous nous limitons à présenter pour chacune de ces catégories une ou deux propriétés.[3] Dans le cadre de futurs travaux, il sera possible de traduire de manière formelle de nouvelles propriétés en fonction des objectifs et contraintes de Gaz de France.

Traitement égalitaire des équivalents

- <u>Préservation des rangs (PR)</u> : les contributions relatives aux coûts totaux des différentes entités devraient aller dans le sens de leurs coûts de faire cavalier seul.
- <u>Traitement égalitaire des équivalents (TE)</u> : si deux entités ont des coûts de faire cavalier seul identiques, elles devraient se voir imputer la même part des coûts totaux du regroupement.

[3] Une liste plus complète est présentée à la section 3.4.

Principe séquentiel

- Insensibilité à l'ampleur des plus grandes demandes (RG) : la contribution d'une entité ne devrait pas être affectée par l'ampleur des demandes plus grandes que la sienne.
- Principe séquentiel (PS) : la contribution d'une entité ne devrait pas être affectée par l'ampleur des demandes des entités dont la contribution est plus élevée que la sienne.

Traitement des agents négligeables

- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN) : si une entité a une demande nulle, la contribution des autres ne devrait pas dépendre de la présence ou non de cette entité dans le problème de partage.
- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN) : si une entité est négligeable, c'est-à-dire si l'ajout de sa demande à celle de n'importe quel autre sous-ensemble d'entités entraîne une augmentation des coûts égale à son coût de faire cavalier seul, alors sa contribution aux coûts devrait se résumer à son coût de faire cavalier seul.

Monotonie

- Monotonie par rapport à la demande (MD) : les parts des entités ne devraient jamais décroître par rapport à leurs demandes.
- Monotonie par rapport aux coûts (MCT) : si les coûts devaient s'avérer plus élevés, quelle que soit l'ampleur du projet ou les niveaux de production à réaliser, alors les parts des coûts imputées aux différentes entités ne devraient pas diminuer.

Bornes sur les contributions

- Participation (PA) : si les entités sont libres de participer à un projet commun, chacune d'elle le fera si elle est assurée de ne pas payer plus que son coût de faire cavalier seul.

Invariance aux échelles

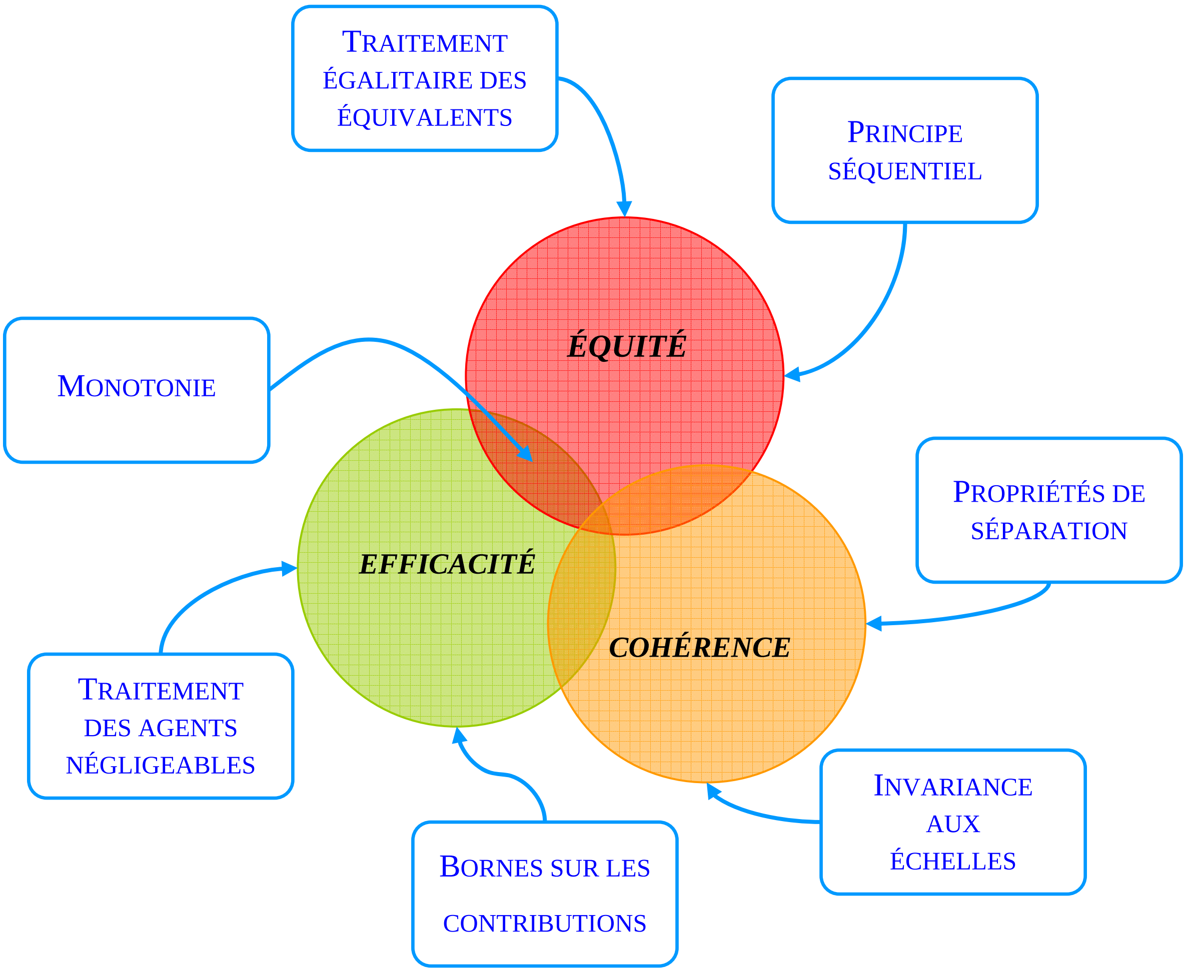
- Insensibilité aux unités de mesure (IU) : la répartition de coûts ne devrait pas être affectée par une transformation des échelles (par exemple un remplacement des Km par des mètres ou un changement d'unité monétaire).

Propriétés de séparation

- Séparation entre entités (SE) : si la fonction de coût peut être séparée selon les entités (ici les clients ou groupes de clients), il devrait en être de même de pour la répartition des coûts.
- Additivité (AD) : si les coûts peuvent être décomposés en plusieurs éléments, la règle de partage de coûts devrait donner les mêmes résultats, qu'on l'applique séparément aux divers éléments de coût, comme par exemple les coûts spécifiques et communs, ou globalement à l'ensemble des coûts.

Principes et propriétés sont des concepts étroitement liés. Il est en effet possible d’associer à chacune des sept catégories de propriétés un et parfois plusieurs principes. Ces associations sont schématisées dans la figure qui suit. Au centre de cette figure se trouvent les trois principes. Elles sont représentées par des cercles se chevauchant afin de signaler le fait que ces concepts ne sont pas étanches. Autour de ces concepts gravitent les sept ensembles de propriétés.

Trois relations nous semblent mériter des éclaircissements. Il s’agit de celles relatives à l’efficacité. Le traitement des agents négligeables est associé à l’efficacité puisqu’il favorise l’unanimité. Les bornes sur les contributions garantissent pour leurs parts la participation, un concept que nous avons associé à l’efficacité. Enfin, la propriété de monotonie peut quant à elle être associée à la fois à l’efficacité car elle induit une relation directe et incitative entre contribution et demande et à l’équité puisqu’il apparaît équitable que l’entité qui demande plus paie plus.



Toute la complexité du choix en terme de principes naît de l'absence de définitions rigoureuses et unanimement acceptées de ces concepts. Nous insistons donc sur le fait que le choix de la méthode doit se faire sur la base de ses propriétés. Il est ensuite possible de construire un *argumentaire autour des principes* qui sous-tendent la méthode de partage de coûts choisie.

RS.2.3 Le choix d'une méthode de partage de coûts

La dernière étape consiste donc à départager les méthodes en fonction des propriétés qu'elles possèdent. Le tableau qui suit présente un échantillon des résultats qui sont présentés dans le rapport principal. Un « O » à l'intersection d'une ligne et d'une colonne indique que la méthode de la ligne correspondante satisfait la propriété de la colonne correspondante. À l'inverse, un « N » signale que la propriété n'est pas satisfaite. Enfin, un « SC » signale que la propriété n'est satisfaite que sous certaines conditions. Le tableau est séparé horizontalement en deux parties. La partie supérieure concerne deux règles qui ne peuvent être utilisées qu'avec des demandes portant sur un bien privé homogène alors que les règles de la partie inférieure peuvent être appliquées à un contexte très général. On distingue également des séparations verticales. Elles permettent de séparer les groupes de propriétés en fonction des principes qu'elles incarnent. Les propriétés de monotonie qui peuvent être associées à l'équité et l'efficacité sont situées entre les colonnes représentant ces principes.

Principes & Propriétés / **Méthodes de partage**	**ÉQUITÉ**					**EFFICACITÉ**			**COHÉRENCE**	
	RG	**TE**	**PS**	**MCT**	**MD**	**IDN**	**IEN**	**PA**	**SE**	**AD**
coûts moyens	O	O	N	O	O	O	O	SC	O	O
séquentielle « unidimensionnelle »	O	O	O	N	O	O	O	SC	O	O
égalitaire	O	O	N	O	O	N	N	N	N	O
bénéfices résiduels	N	N	N	N	N	O	O	SC	O	N
méthodes comptables	N	N	N	N	N	O	N	SC	O	N
proportionnelle au coût marginal	N	N	N	N	SC	O	N	SC	N	N
Auman-shapley	N	N	N	N	SC	O	O	SC	O	O
Shapley-Shubik	N	N	N	N	O	O	O	SC	O	O
nucléole	N	N	N	N	N	O	O	SC	O	N
séquentielle « multidimensionnelle »	O	O	O	N	O	O	N	SC	O	N

Généralement, on va rechercher des méthodes qui satisfont à plusieurs propriétés à la fois. Idéalement, on aimerait que le plus grand nombre de ces propriétés voire toutes soient satisfaites. Malheureusement, certaines propriétés peuvent être incompatibles entre elles. Un certain nombre de propositions ont été démontrées à ce sujet. D'autres propositions affirment que telle et telle propriété est satisfaite par telle ou telle méthode. D'autres enfin établissent qu'il y a une seule méthode qui satisfait simultanément à un ensemble donné de propriétés. Ce dernier type de proposition peut s'avérer particulièrement utile pour le décideur.

Par delà ces propriétés, la disponibilité et la qualité des données va conditionner la qualité des répartitions. Ainsi, toutes les règles qui sont basées sur la fonction de coût nécessitent la connaissance de cette fonction, au moins pour la demande totale et parfois pour toutes les demandes pouvant émaner de chaque sous-groupe. Dans le cas de la règle séquentielle, il faut au moins pouvoir calculer le coût des demandes intermédiaires dont le nombre est égal au nombre total d'entités. Dans le cas de la règle de répartition proportionnelle au coût marginal, il faut connaître le coût marginal de la dernière unité demandée de chaque entité. Pour la règle Aumann-Shapley, il faut connaître ce coût marginal pour chaque unité. De manière générale, il faut connaître les technologies de production et de distribution, desquelles les fonctions de coûts peuvent être obtenues ou estimées.

RS.3 Étape 2 : la tarification

Une fois cette étape de partage de coût franchie, il convient de mettre en place un système de tarification permettant de couvrir et récupérer ces coûts. Dans le problème de partage des coûts communs, on suppose, comme nous l'avons fait dans la section précédente, que les quantités demandées par les différents agents ou entités sont données au départ. Il s'agit alors de répartir entre ces derniers le coût de les satisfaire de façon conjointe. La question abordée dans la présente section est de couvrir et récupérer les coûts attribués à chaque entité en admettant que la manière même de le faire peut avoir une influence sur les demandes elles-mêmes. On suppose donc que les agents, clients ou consommateurs ont une *fonction de demande* pour les biens et services en question.

Un certain nombre de méthodes de tarification sont présentées dans cette section. On débutera par la tarification à la Ramsey-Boiteux, aussi dite linéaire. Dans ce cas, il n'y a qu'un prix par bien ou service (entendu au sens large) bien qu'il puisse varier d'un bien à un autre. On montrera par la suite qu'on peut faire mieux avec des tarifs polynômes ou non linéaires, comprenant des charges fixes, des prix d'usage, etc.

RS.3.1 La tarification à la Ramsey-Boiteux

La théorie économique nous enseigne que, pour assurer la maximisation du bien-être des consommateurs, les biens et services doivent être vendus à leur coût marginal social.

Cependant, en présence d'économies d'échelle, ce mode de tarification génère un déficit. Une solution possible serait de combler ce déficit par une subvention, comme on le fait souvent pour le transport en commun et la production de spectacles par exemple. Dans d'autres situations, cela est politiquement impossible et on requiert plutôt que le responsable de la production s'autofinance, au moins en partie, ou encore qu’il atteigne un certain niveau (possiblement maximal) de rentabilité. Pour ce faire, il doit alors majorer les prix, du moins certains d'entre eux, au dessus des coûts marginaux.

La règle de Ramsey-Boiteux indique comment opérer cette majoration, tout en générant le moins de distorsions possibles par rapport aux consommations efficaces ou de premier rang obtenues avec la tarification au coût marginal. Elle maximise le bien-être total des consommateurs sous la contrainte budgétaire ou la contrainte de rentabilité. Elle suppose les fonctions de demande connues ou, du moins, les élasticité-prix de ces dernières.

Avec la tarification Ramsey-Boiteux la marge réalisée par rapport au prix doit être d'autant plus importante que la demande des consommateurs a une faible élasticité. L'intuition derrière cette méthode est la suivante. Les consommateurs dont la demande est moins élastique sont moins sensibles aux variations de prix que ceux dont la demande est plus élastique. Ils peuvent faire face à un prix plus élevé, payer une marge plus importante, sans pour autant diminuer sensiblement leur consommation. Les consommateurs ayant une élasticité plus grande paieront un prix plus proche du coût marginal qu'ils imposent au producteur. On veut ainsi que tous les consommateurs ou tous les groupes de clients maintiennent leurs quantités demandées respectives à des niveaux proches des niveaux de premier rang.

RS.3.2 La tarification non linéaire

Si l'on se contente d'une tarification linéaire, définie par un seul nombre ou monôme, la méthode de Ramsey-Boiteux indique comment faire payer les différents types de consommateurs de manière à maximiser le bien-être social sous contrainte de budget ou de rentabilité.

Cependant, la théorie économique nous enseigne qu'il est possible de faire mieux, en offrant aux consommateurs un menu de différents tarifs polynômes, parmi lesquels chacun peut librement choisir. Un tarif polynôme est un tarif non linéaire, défini par différents prix qui s'appliquent à différentes caractéristiques de la demande. Un tarif non linéaire peut, par exemple, être composé d'une charge fixe et de différents prix pour différentes plages de consommation. Plus exactement, il est possible d'avantager certains consommateurs, sans en défavoriser d'autres, tout en augmentant les recettes nettes. Le fait que toutes les structures tarifaires soient disponibles à tous les consommateurs confère à cette forme de tarification un principe d'équité notable, celui d'absence d'envie. Chaque utilisateur peut choisir le tarif qui convient le mieux à ses besoins et ses particularités.

Une question venant naturellement à l'esprit est de savoir s'il existe une structure optimale pour de tels tarifs. La réponse est positive. Cette structure optimale dépend de la nature des différentes demandes, plus particulièrement des élasticités des demandes des consommateurs ou groupes de consommateurs (marchés, demandes). En fait, quand on considère des tarifs polynômes, il faut distinguer l'élasticité par rapport à la charge fixe de l'élasticité par rapport à la charge variable. Ces élasticités sont en principe différentes et la structure tarifaire optimale dépend des deux. Dans la recherche du menu optimal de tarifs, on doit s'assurer que chaque consommateur ou groupe de consommateurs choisira, volontairement et naturellement, le tarif qui lui est dédié. En outre, les différents tarifs doivent être conçus de sorte que la contrainte d'équilibre budgétaire (ou de profit) soit vérifiée.

Comme pour les méthodes de partage de coûts, ces règles de tarification efficaces ou optimales sont trop souvent ignorées. Elles constituent pourtant un outil remarquable permettant à toute entreprise de gagner en performance.

Conclusion

Dans notre rapport, nous proposons une approche globale à la tarification intégrant une étape de partage de coûts communs. Nous présentons également les principales méthodes de partage des coûts et de tarification permettant aux décideurs de prendre des décisions sur la base de critères explicites rigoureux. Des études plus poussées devraient permettre de déterminer la combinaison méthode de partage de coûts / méthode de tarification la plus à même d'embrasser les contraintes et objectifs de Gaz de France.

Deux conclusions peuvent cependant d'ores et déjà être dégagées de ces premiers travaux. D'une part, le choix d'une méthode de partage de coûts communs doit être fondé sur les propriétés que vérifie cette dernière. L'utilisation de grands principes associés à ces propriétés peut aider ensuite à construire l'argumentaire entourant la communication et la défense du choix effectué. D'autre part, nonobstant le caractère efficace ou optimal de cette procédure, il est possible que son application entraîne le façonnement de tarifs qui pourraient être perçus comme difficilement acceptables au plan politique. Dans un tel cas, il serait inopportun de modifier de manière ad hoc la règle de partage des coûts communs, choisie au départ pour ses propriétés d'efficacité, d'équité ou de cohérence, ou la règle de tarification à la Ramsey-Boiteux (contraintes de tarifs uniformes et de profitabilité), permettant de s'éloigner le moins possible des niveaux de consommation efficaces (obtenus par une tarification au coût marginal). Il faudrait plutôt recourir à des mécanismes incitatifs de support direct pour aider et compenser les clients à protéger et ce, sans manipulation des tarifs.

Partage des coûts efficace, équitable et cohérent d'un côté et tarification optimale (accompagnée de mécanismes d'atténuation des impacts, le cas échéant) de l'autre sont des outils essentiels et complémentaires qui permettront à Gaz de France de gagner en compétitivité et performance.

Mais partage des coûts et tarification sont des considérations qui suivent chronologiquement la réalisation d'investissements en infrastructures qui eux-mêmes doivent faire l'objet d'une optimisation rigoureuse. La chronologie ne doit cependant pas faire oublier que la valorisation des infrastructures communes doit reposer sur les trois piliers que constituent les méthodologies de choix d'investissements, de partage des coûts et de tarification. Nous n'avons traité dans notre rapport que des deux dernières. Mais il ne faut pas oublier qu'il faut se préoccuper aussi de la première. Le trio méthodologique n'aura en définitive que la puissance du maillon le plus faible.

1 INTRODUCTION GÉNÉRALE

La plupart des organisations, sinon toutes, répartissent d'une manière ou d'une autre des coûts communs entre leurs diverses composantes ou encore entre leurs différents partenaires ou clients. Gaz de France n'échappe pas à la règle. En effet, pour fournir du gaz à ses clients finals, Gaz de France est confronté à divers coûts dont certains ne sont pas directement attribuables à un client donné. Il s'agit par exemple des coûts liés à :

- l'approvisionnement : un négociant gazier mobilise des contrats d'approvisionnement négociés auprès des producteurs ou intervient sur des marchés spots ;
- l'accès au réseau de transport et de distribution ;
- l'accès à des capacités de stockage pour faire face aux fluctuations saisonnières de la demande de ces clients.

Attribuables ou non, les coûts se doivent d'être récupérés. La question qui se pose est alors la suivante : *comment déterminer la part que chaque client (ou groupe de clients) doit supporter et quel mécanisme (tarification) utiliser pour récolter la part attribuée à chacun ?* La compétitivité et la performance de Gaz de France dépendent, pour une part non négligeable, de la qualité de la règle de partage des coûts et du mécanisme de tarification qui seront mis en place. Notons dès à présent que la problématique soulevée par Gaz de France implique le rapprochement novateur de deux considérations différentes mais intimement liées : le partage des coûts communs et la tarification.

La différence fondamentale entre ces deux méthodes se situe principalement au niveau de la demande à l'origine du coût. Lors du partage des coûts cette dernière est donnée en ce sens que la demande de chaque client n'est pas supposée varier en fonction de la part des coûts qui lui est attribuée. La tarification, à l'inverse, est fondée sur l'hypothèse que la demande est sensible au tarif.

L'objet du présent rapport est de rendre les méthodes de partage de coûts et de tarification plus accessibles et d'en démontrer la puissance en termes d'analyse. Il consiste également à suggérer les premières pistes de recherche dans le domaine encore inconnu du couplage *méthode de partage de coûts / méthode de tarification* en vue d'améliorer la compétitivité et l'efficacité de Gaz de France.

Les méthodes de partage des coûts communs et de tarification développées depuis quelques années constituent des outils puissants qui permettent de répondre de manière rigoureuse à la problématique du présent rapport. Cependant, bien que l'analyse scientifique de ces méthodes soit déjà relativement avancée, leur application au sein des organisations (entreprises, alliances ou réseaux d'entreprises, gouvernements) reste relativement embryonnaire et souvent tributaire d'une approche historique ad hoc, plutôt que rationnellement choisie pour maximiser la performance et la valeur de l'organisation. Il faut reconnaître que l'analyse de ces méthodes exige une certaine dose de mathématiques. Il est important, par ailleurs, de préciser que ces mathématiques ne servent qu'à traduire, dans un langage rigoureux et programmable, les contraintes institutionnelles et les objectifs que doit satisfaire ou rencontrer la règle de partage recherchée.

Aucune recommandation en ce qui concerne le couple méthode de partage de coûts / méthode de tarification qui serait le plus à même d'embrasser les contraintes et objectifs de Gaz de France ne sera faite au sein du présent rapport. En effet, afin d'aboutir à ce type de conclusions, les recherches devront être approfondies en tenant compte par exemple des informations disponibles ou encore de la forme des fonctions de coût et de demande.

Nous insistons cependant dès à présent sur le fait que le choix d'une méthode de partage de coûts doit se faire sur la base de ses propriétés. Il est contre-indiqué de choisir une méthode sur la simple base d'un seul ou même de quelques exemples, comme le font traditionnellement les organisations ou consortiums, à la suite de longues et souvent difficiles négociations entre les parties, chacune d'elles privilégiant évidemment la méthode qui lui est la plus favorable. Nous soulignons le fait qu'il est beaucoup plus simple et logique d'identifier une méthode parmi l'ensemble des méthodes possibles sur la base de ses propriétés et ce avant même de connaître les résultats qu'elles peuvent donner lors d'applications concrètes.

Le rapport est constitué des parties suivantes : nous décrivons dans la partie 2 la problématique auquel Gaz de France est confronté et présentons la solution tarifaire globale susceptible de répondre à cette problématique. La solution que nous proposons est décomposable en deux étapes : une étape de partage des coûts est suivie d'une étape de tarification. Ces deux étapes font respectivement l'objet des parties 3 et 4. La partie 5 est consacrée à la conclusion.

2 PROBLÉMATIQUE ET SOLUTION TARIFAIRE GLOBALE

Le problème de partage des coûts qui nous a été décrit dans le cahier des charges réf. *M.DEG.E2S.2005.518-OME/CJA* est le suivant :

> Un négociant gazier verticalement intégré (en l'occurrence Gaz de France) supporte des coûts pour fournir du gaz à ses clients finals. *« […] En effet, un négociant mobilise des contrats d'approvisionnements négociés auprès des producteurs ou intervient sur des marchés spots, un accès aux réseaux de transport et de distribution ainsi que des capacités de stockage pour faire face aux fluctuations saisonnières de la demande de ces clients. Parmi ces coûts, une part prépondérante n'est pas directement attribuable à un client donné, il s'agit des coûts d'approvisionnement, d'entrée sur le réseau de transport et des coûts de stockage. Les coûts relatifs au transport et au stockage sont déterminés par des tarifs régulés que les gestionnaires d'infrastructures appliquent ; ils sont donc identiques quelle que soit la nature de celui qui sollicite l'accès à l'infrastructure ».*

Dans ce contexte, le projet MECONG a pour objectif de proposer des outils permettant d'allouer les coûts communs supportés par le négociant gazier. Cette problématique implique, à notre sens, le rapprochement novateur de deux considérations différentes mais intimement liées : le partage des coûts communs et la tarification. Nous envisageons ce rapprochement par la création d'une *méthode de tarification globale* intégrant une étape de partage des coûts communs.

Notons qu'il n'y a pas nécessairement de corrélation très forte entre la conception des tarifs et les méthodes de répartition des coûts en vigueur dans les entreprises. La concordance entre la répartition des recettes et celle des coûts ne peut donc habituellement être vérifiée que par simulation et, à la rigueur, ex post. La divergence entre les deux représente ce qu'on qualifie communément d'interfinancement entre les classes de clients. Lorsqu'un client paie moins que ce qu'il aurait dû payer en vertu de la répartition des coûts, on dit qu'il est financé par les clients qui paient plus que leur part de coûts.

Souvent les exigences des organismes de régulation portent à la fois sur les règles de répartition des coûts et sur les tarifs. On veut souvent que les premières soient les plus « équitables » possibles et que les deuxièmes donnent des résultats qui se rapprochent de la répartition des coûts, et donc ne produisent pas trop d'interfinancement. L'entreprise doit par contre tenir compte au premier chef de la position concurrentielle des différents tarifs, des risques inhérents à chaque catégorie de consommateurs et de l'« équité » entre les classes tarifaires.

Les préoccupations des régulateurs en ce qui concerne la répartition des coûts et la prise en compte de cette répartition dans la fixation des tarifs ne sont généralement pas au diapason des exigences d'une tarification optimale ou efficace.

La théorie économique veut qu'il n'y ait pas de mal, bien au contraire, pour un monopole sujet à une réglementation de ses profits, ou encore pour une entreprise avec pouvoir de marché plus ou moins limité par la concurrence, à se préoccuper de la profitabilité relative des services qu'il offre et par conséquent à discriminer entre les clients en fonction de ce qu'ils sont prêts à payer étant donné les alternatives dont ils peuvent bénéficier. À l'inverse, une tarification basée exclusivement sur une formule de partage des coûts, même si cette formule obéit à des critères d'équité fort défendables, peut donner des résultats très différents d'une tarification efficace dans la mesure où elle ne tient aucunement compte des élasticités des différentes composantes des demandes globale et spécifique des diverses clientèles.

Dans le cadre de la problématique de Gaz de France, nous envisageons de coupler le partage des coûts communs et la tarification de la manière décrite dans la figure qui suit.

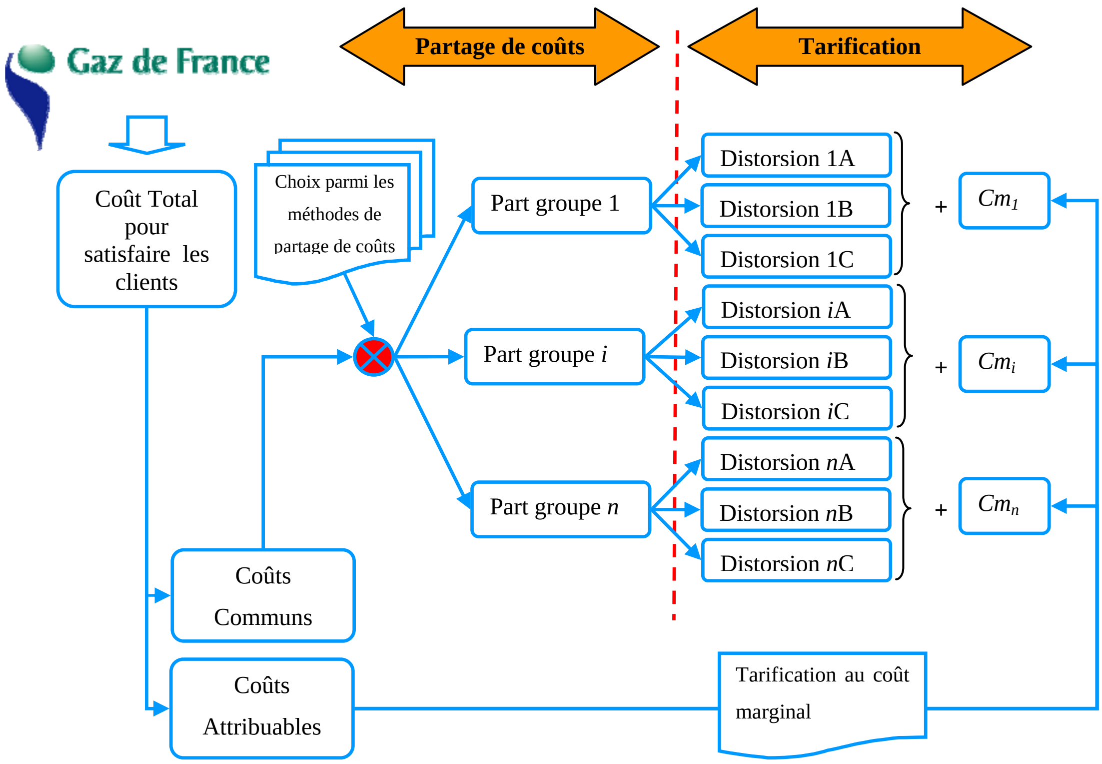


Figure 1 – Du partage des coûts à la tarification

Cette figure s'interprète de la manière suivante. Gaz de France supporte divers coûts pour satisfaire ses clients. Ces coûts se partagent en coûts communs (au départ non attribuables) et coûts attribuables ou spécifiques. Au cours d'une première étape (à gauche de la ligne en pointillés), les coûts communs sont répartis, à l'aide d'une méthode appropriée de partage des coûts, entre les divers groupes de clients identifiés. Une fois cette étape franchie, on passe à la phase de tarification (à droite de la ligne en pointillés). Il convient au cours de cette étape de récupérer, pour chaque groupe de clients, l'ensemble des coûts attribués à ce groupe. Les coûts qui étaient attribuables au départ pourront souvent être récupérés par une tarification au coût marginal. Les coûts communs attribués aux divers groupes, dans la première étape, seront récupérés grâce aux distorsions par rapport aux coûts marginaux en s’assurant de s'éloigner au minimum de la solution optimale.[4] A ce stade, chaque groupe de clients sera possiblement scindé en plusieurs catégories et le processus de tarification pourra être affiné davantage. Ce phénomène est représenté par les trois distorsions (catégories) proposées pour chaque groupe.

Confronté à cette méthode globale de tarification, le décideur est tenu d'effectuer des choix. Le premier de ce ces choix doit porter sur la méthode de partage des coûts à instaurer. Intéressons-nous dans un premier temps à cette étape cruciale. Quelles sont les méthodes à disposition du décideur ? Comment effectuer un choix optimal ? Sur quels critères doit porter ce choix ? Telles sont les questions auxquelles nous apportons des réponses dans la partie qui suit.

[4] Les distorsions seront calculées en fonction de la règle de l'inverse de l'élasticité.

3 LE PARTAGE DES COÛTS COMMUNS

Avant de présenter les méthodes de partage de coûts, il convient de formaliser le problème de la répartition des coûts communs de la manière la plus générale possible.

3.1 La formalisation du problème de répartition des coûts

Un problème peut impliquer des clients d'une entreprise ou d'un organisme quelconque, les divisions d'une entreprise, les partenaires d'un projet, les missions d'un organisme, les divers usages d'un équipement, etc. On les désignera sous le terme générique d'*entités*. Ces dernières ont des besoins qui peuvent porter sur un ou plusieurs biens, qui peuvent être différents d'une entité à l'autre, et qui peuvent être publics ou privés. Ces besoins peuvent aussi porter sur les caractéristiques d'un équipement, pourvu qu'ils puissent être représentés par des nombres réels, un par caractéristique.

On suppose qu'il y a *n entités* concernées par un projet bien défini. Ces entités sont repérées par un indice i (parfois j lorsqu'il faut distinguer entre deux entités). Elles forment un ensemble $N = \{1,...,n\}$. Ces entités ont des besoins, généralement différents, qui peuvent prendre des formes diverses. Dans certains cas, les besoins ou demandes peuvent être exprimés par un nombre réel. On examine d'abord ce cas. On présente ensuite le cas plus général où les demandes, plus complexes, sont exprimées sous forme de suites ou vecteurs de paramètres.

3.1.1 Les demandes

Dans les situations les plus simples, les besoins des n entités portent sur un même bien privé homogène. Elles peuvent être représentées par des nombres réels non négatifs $q_1,...,q_n$. On convient alors d'indicer les entités par ordre croissant de leurs besoins : $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_n$. On désigne ces quantités par le vecteur $Q = (q_1,...,q_n)$. La demande totale est donnée par $\sum_{i=1}^{n} q_i$. On dit alors que les *demandes sont unidimensionnelles*.

De façon plus générale, les besoins ou demandes des entités comportent plusieurs caractéristiques qui peuvent être communes ou propres aux entités. On suppose que la demande de l'entité i peut être décrite à l'aide de m_i caractéristiques, par exemple la hauteur, la largeur et la longueur d'un tunnel ou les volumes de gaz requis respectivement en été et en hiver. On suppose de plus que ces caractéristiques peuvent être représentées par des nombres réels non-négatifs. La demande de l'entité i peut donc être représentée par un vecteur $q_i = (q_{i1}, ..., q_{im_i})$ dont les éléments sont les valeurs des différentes caractéristiques de cette demande.

On pose $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$. La suite des demandes des différentes entités est notée $Q = (q_1, ..., q_n)$. Il s'agit d'une suite de m nombres. Dans la mesure où les biens peuvent avoir un caractère public, la demande globale n'est plus nécessairement donnée par la sommation des demandes individuelles, qui peuvent d'ailleurs comporter des nombres de biens différents d'une entité à l'autre. On parle de *demandes multidimensionnelles* pour ce contexte plus général.[5]

Comme exemples de cette classe plus générale de problèmes, mentionnons :

- la construction d'un réservoir hydraulique dont les différents usages exigeraient normalement des capacités et des configurations fort différentes ;
- la construction d'une route dont la capacité portante de la chaussée et la taille des viaducs sont largement déterminées par la nécessité d'acheminer un trafic de poids lourds, alors que le seul trafic automobile n'exigerait que des ouvrages plus légers ;
- la construction d'un réseau de distribution (gaz, électricité, communications, routes) dans lequel les capacités peuvent différer d'un segment à l'autre alors que les demandes peuvent différer d'une période à une autre ainsi que d'un segment à un autre.

Dans cette partie on suppose que la demande Q est donnée une fois pour toutes, i.e. qu'elle est inélastique. On se place aussi dans un contexte où les entités n'ont pas d'autre choix que de se

[5] Pour plus de détails sur la représentation de ce type de demandes, voir Téjédo et Truchon (2002).

mettre ensemble pour répondre à leurs besoins, que ce soit pas intérêt ou décret. Bon nombre de situations se présentent de cette façon dans la réalité. Dans la partie 4, on verra l'influence que peut avoir l'intégration d'une fonction de demande à savoir le passage d'un problème de partage des coûts à un problème de tarification.

3.1.2 Les fonctions de coût

La formulation du problème est complétée par l'introduction d'une fonction de coût, i.e. d'une règle qui attribue des coûts aux valeurs possibles des demandes. Cette fonction est notée *C*. De façon précise, on désigne par $C(Q)$ le coût de satisfaire à une demande *Q*.

On aura aussi besoin des coûts des demandes de sous-ensembles d'entités *S*. Comme *C* est défini sur l'ensemble des suites *Q*, qui sont de dimension *m*, il faut mettre les demandes individuelles et celles de tout sous-ensemble d'entités sous cette forme pour pouvoir leur appliquer *C*. On représente la demande d'un sous-ensemble *S* d'entités par Q^S, qui est le vecteur *Q* dans lequel toutes les demandes, autres que celles des entités de *S*, sont ramenées à 0. Le coût de satisfaire uniquement aux demandes des entités de *S* est donc $C(Q^S)$. Comme cas particulier, on a $C(Q^{\{i\}})$, qui est le *coût de faire cavalier seul*. En fait, on aura besoin du coût de faire cavalier seul pour différentes demandes *Q*. Aussi, on définit les fonctions de coût de faire cavalier seul pour les différentes entités. Elles sont notées c_i et définies par :

$$c_i(q_i) = C\left(Q^{\{i\}}\right), \quad i = 1, \dots, n$$

où q_i est, rappelons-le, la composante de *Q* qui concerne l'entité *i*. On suppose que *C* est non décroissante. Une augmentation de la demande de la part d'une ou plusieurs entités ne peut entraîner une diminution de coût. Elle pourrait cependant laisser les coûts inchangés. C'est le cas s'il est possible de répondre à une plus grande demande de la part d'une entité sans changer la production. Par contre, on suppose que la fonction *C* induit des fonctions c_i croissantes.

Il peut y avoir plusieurs façons de satisfaire à une demande, i.e. de traduire une demande en un projet commun. Différents projets peuvent avoir des coûts différents. Le nombre $C(Q)$

doit s'entendre comme le coût du projet qui permet de répondre aux besoins exprimés de la manière la moins coûteuse possible. Ce meilleur projet peut changer avec la demande elle-même et les conditions du marché comme les prix. Rappelons-nous cependant qu'on suppose Q donné.

On désigne par $\alpha(Q)$ un projet capable de répondre à la demande Q et par $A(Q)$ l'ensemble de tous ces projets. Un projet $\alpha(Q)$ est généralement défini par une liste de caractéristiques qui peuvent plus ou moins correspondre à celles qui servent à exprimer les demandes. La fonction α peut aussi être vue comme une fonction d'agrégation des demandes des entités en demande globale. Soit $c(\alpha(Q))$ le coût d'un projet $\alpha(Q)$. La fonction de coût est alors définie par :

$$C(Q) = \min_{\alpha(Q)\in A(Q)} c\left(\alpha(Q)\right)$$

Un cas particulier est celui où les demandes des entités portent toutes sur une même liste de biens privés. La fonction α est alors définie de façon unique par $\alpha(Q) = \sum_{i=1}^{n} q_i$. Autrement dit, la demande globale est la somme des demandes individuelles. La fonction C est alors de la forme :

$$C(Q) = c\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)$$

et on dit qu’elle est homogène.

Un autre cas particulier est celui où les entités demandent encore les mêmes biens mais où ces derniers sont des *biens publics purs*. La quantité consommée par une entité ne restreint pas la consommation des autres. La fonction α est encore définie de façon unique, cette fois par $\alpha(Q) = c(\max_i\ y_{i1},\dots,\max_i\ y_{ik})$ où k est le nombre de ces biens. Autrement dit, la quantité à produire de chaque bien est la quantité maximale demandée par les entités. C est alors de la forme :

$$C(Q) = c\left(\max_i\ y_{i1},\dots,\max_i\ y_{ik}\right)$$

La dérivée de la fonction C par rapport à un de ses arguments, lorsqu'elle existe, est le *coût marginal* de la quantité correspondante. Pour des changements discrets de quantité, on parlera plutôt de *coût incrémental*. Par exemple, $C(Q^{S \cup i}) - C(Q^S)$ est le coût incrémental de l'ajout de la demande de l'entité i à celles des entités de S.

3.1.3 La règle de répartition

Une règle de répartition est une fonction x qui, pour toute demande Q et toute fonction de coût C, spécifie la part du coût $C(Q)$ supportée par les différentes entités. On note $x_i(Q,C)$ la charge imputée à l'entité i et $x(Q,C)$ la liste de ces dernières :

$$x(Q,C) = \left(x_1(Q,C),\ldots,x_n(Q,C)\right)$$

Une règle de répartition satisfait normalement : $\sum_{i=1}^{n} x_i(Q,C) = C(Q)$. Lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, on peut écrire x_i pour $x_i(Q,C)$.

3.2 Les méthodes de partage des coûts

On peut distinguer au moins trois grandes classes de méthodes de répartition des coûts. Elles font l'objet des trois sous-sections qui suivent. Dans la première, on retrouve les méthodes qui consistent à répartir la totalité ou une partie des coûts selon une règle de proportionnalité, à partir de critères plus ou moins ad hoc. Elles sont parfois motivées par certaines considérations éthiques. On peut multiplier à l'infini ce genre de méthodes en faisant varier la partie des coûts qui font l'objet de la répartition proportionnelle et les critères de cette répartition. Ce sont les plus anciennes de toutes les méthodes de répartition et sans doute celles qui sont encore le plus utilisées. Plusieurs raffinements de ces méthodes ont été suggérés dans des revues de comptabilité, entre autres par Moriarity (1975), Louderback (1976), Balachandran et Ramakrishnan (1981). Elles sont présentées sous le titre de méthodes comptables.

La deuxième catégorie de méthodes est empruntée à la théorie des jeux coopératifs. Dans cette catégorie, on retrouve le concept de cœur, la valeur de Shapley, le nucléole et les tarifs à la Aumann-Shapley. Ces derniers sont donnés par la somme (l'intégrale) des coûts marginaux le long d'un rayon allant de l'origine au point qui représente la demande. L'idée est généralisée à d'autres types de sentier et à des changements discrets.

La troisième catégorie de méthodes est beaucoup plus récente. Elle comprend les règles dites de répartition séquentielle (serial cost sharing). Ce type de règle a été proposé pour la première fois par Shenker (1990) pour les demandes unidimensionnelles. Il a été l'objet d'une abondante littérature depuis. Moulin et Shenker (1992, 1994) en ont fait une analyse extensive. Koster et al. (1998) l'ont étendu au contexte où les agents demandent plusieurs biens privés homogènes. Sprumont (1998) a étendu la règle au contexte où chaque agent demande un bien qui lui est spécifique. Téjédo et Truchon (2000 et 2002) poussent la généralisation au contexte multidimensionnel décrit à la sous-section 3.1.1.

3.2.1 Les règles de proportionnalité

Certaines des règles qu'on va examiner font intervenir les éléments de $C(Q)$ qui peuvent être attribués directement aux différentes entités *i*. On les notera $ca_i(Q)$ et on les appellera *coûts attribuables*. Il ne faut pas confondre ces coûts avec ceux de faire cavalier seul, i.e. $c_i(q_i)$. Ceci nous amène à définir les *coûts communs* par :

$$cc(Q) = C(Q) - \sum_{i=1}^{n} ca_i(Q)$$

On aura également besoin du *coût incrémental* de desservir l'entité *i* en plus des autres dans *N*, lequel est défini par :

$$cm_i(Q) = C(Q) - C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$$

Dans certains cas, on peut avoir $ca_i(Q) = 0$ pour tout *i* et donc $cc(Q) = C(Q)$.

Un très grand nombre de méthodes utilisées en pratique et d'autres qui ont été envisagées consistent à exiger une contribution de base xb_i de l'entité *i* et à répartir le résidu du coût total du projet, une fois soustraites les contributions de base, entre toutes les entités, proportionnellement aux valeurs d'une certaine variable t_i. La formule générale prend donc la forme :

$$x_i = xb_i + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^{n} t_j}\left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j\right) \tag{1}$$

Il est à noter que le résidu $C(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j$ peut être positif ou négatif.

Par le choix des xb_i et des t_i, on peut obtenir autant de règles que l'on veut. En posant $xb_i = 0$ et $t_i = 1$ pour tout *i*, ce sont les coûts totaux qui sont répartis de façon égalitaire entre les entités :

$$x_i = \frac{1}{n} C(Q)$$

Certaines règles poussent la sophistication jusqu'à décomposer le terme $C(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j$ de (1) en plusieurs composantes, disons $\left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j\right)_s$, et à répartir chacune de ces composantes selon un critère t_i^s qui lui est propre. Ainsi, la *Formule du Massachusetts* (Biddle et Steinberg (1985)) consiste à répartir le tiers des coûts communs d'une entreprise entre ses divisions, proportionnellement aux ventes s_i des divisions *i*, un deuxième tiers proportionnellement aux actifs a_i et le troisième tiers proportionnellement aux nombres d'employés e_i. Cela revient à poser $xb_i = ca_i(Q)$ et à remplacer $\frac{t_i}{\sum_{j=1}^{n} t_j}$ dans (1) par :

$$\left(\frac{s_i}{3\sum_{j=1}^{n} s_j} + \frac{a_i}{3\sum_{j=1}^{n} a_j} + \frac{e_i}{3\sum_{j=1}^{n} e_j}\right)$$

Inutile de dire qu'une telle règle ne possède aucune justification théorique.

3.2.1.1 La règle des coûts moyens

Il s'agit sans doute de la méthode la plus répandue et la plus simple. Elle s'applique à la classe générale de problèmes où les demandes sont homogènes et représentées par des nombres non-négatifs q_i. Elle consiste à répartir les coûts totaux ou une partie des coûts selon les quantités demandées. Chaque entité paie un montant qui est le produit de sa demande et du coût moyen. Autrement dit, elle est tarifée au coût moyen. Cette méthode est définie formellement par :

$$x_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^{n} q_j} C(Q) = q_i \frac{c\left(\sum_{j=1}^{n} q_j\right)}{\sum_{j=1}^{n} q_j} \tag{2}$$

Il s'agit clairement d'un cas particulier de la formule (1).

Cette règle ne peut évidemment pas être utilisée dans le cas des demandes hétérogènes ou multidimensionnelles. Certaines des autres règles de proportionnalité peuvent être vues comme des généralisations de la règle des coûts moyens. De façon générale, il s'agit de remplacer les q_i dans (2) par des fonctions numériques h_i de q_i. Cela donne :

$$x_i = \frac{h_i(q_i)}{\sum_{j=1}^{n} h_j q_j} C(Q) \tag{3}$$

Ainsi, on verra que la méthode de Moriarity, présentée ci-dessous, revient à poser $h_i(q_i) = c_i(q_i)$ pour chaque entité, i.e. à répartir le coût total proportionnellement aux coûts de faire cavalier seul. Un autre choix possible pour $h_i(q_i)$ est le coût marginal de la demande de l'entité *i*. La *répartition proportionnelle aux coûts marginaux* qui en résulte est présentée de façon formelle au paragraphe 3.2.2.1.

Ces critères sont évidemment arbitraires et il est difficile d'en choisir un plutôt qu'un autre. Alors que la règle de tarification au coût moyen possède des propriétés intéressantes, ce n'est pas le cas d'une règle plus générale comme (3), sauf peut-être pour la répartition proportionnelle aux coûts marginaux. Si on veut une généralisation de la tarification au coût moyen, il faut plutôt regarder du côté de la méthode Aumann-Shapley présentée au paragraphe 3.2.2.2 et qui possède des propriétés intéressantes.

3.2.1.2 La méthode des bénéfices résiduels

Cette méthode a été proposée pour répartir les coûts des bassins hydrauliques à usages multiples. Son origine remonte aux travaux de la Tennessee Valley Authority en 1938, bien que cette agence se défendait bien de vouloir utiliser une formule mathématique. La méthode, connue aujourd'hui sous le nom de *méthode des bénéfices résiduels*, est un raffinement de celle que cette agence avait conçue pour son propre usage. Elle a été utilisée par le Japon, au moins jusqu'en 1985, pour le partage des coûts de ses réservoirs hydrauliques.[6]

La méthode est obtenue en posant $xb_i = c_i(q_i)$ et $t_i = c_i(q_i) - cm_i(Q)$ dans la formule (1), ce qui donne :

$$x_i = c_i(q_i) - \frac{c_i(q_i) - cm_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n}\left(c_j(q_j) - cm_j(Q)\right)}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q)\right) \tag{4}$$

Elle consiste à faire payer à chaque entité son coût de faire cavalier seul et à redistribuer le surplus ainsi généré au prorata des différences entre coûts de faire cavalier seul et coûts incrémentaux. D'aucuns y ont vu la recherche d'une forme d'équité, ce qui n'est pas évident. Les facteurs de proportionnalité n'étant pas définis lorsque $c_i(q_i) = cm_i(Q)\ \ \forall i$, on pose alors $x_i = c_i(q_i)$.

3.2.1.3 Les méthodes comptables

Entre 1975 et 1981, on a vu apparaître des propositions de méthodes de répartition proportionnelle dans des revues de comptabilité. On en a recensé trois, qui sont présentées sous le titre de méthodes comptables.

La première a été proposée par Moriarity (1975). Elle consiste à faire payer une contribution de base qui est égale au plus petit des montants $c_i(q_i)$ et $ca_i(Q) + cc(Q)$, noté w_i, et à redistribuer le surplus qui serait généré de cette façon au prorata des w_i. On l'obtient en posant $xb_i = t_i = w_i$ ou, de façon équivalente, $xb_i = 0$ et $t_i = w_i$ dans (1), ce qui donne :

$$x_i = w_i + \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j}\left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} w_j\right) = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j} C(Q)$$

Dans le cas où $c_i(q_i) \le ca_i(Q) + cc(Q)$ pour tous les i, elle revient à partager le coût total au prorata des $c_i(q_i)$.

[6] À ce sujet, voir Ransmeier (1942) et Okada (1985).

Moriarity voyait les quatre avantages suivants à sa méthode : elle favorise la participation à un projet commun dans la mesure où ce projet peut amener une réduction des coûts totaux. Chaque entité participe à la réduction des coûts totaux. Aucune entité n'est subventionnée par les autres. Elle incite les entités à chercher à minimiser le coût de faire cavalier seul. Il faut cependant noter que, si le coût de faire cavalier seul est une information privée, les entités sont incitées à prétendre que ces coûts sont plus faibles qu'ils ne le sont en réalité.

La méthode de Moriarity peut imputer à une entité une contribution inférieure à $ca_i(Q)$, la partie du coût dont elle est directement responsable. On peut donc mettre en doute le deuxième avantage que Moriarity voyait à sa méthode, à savoir qu'aucune entité n'est subventionnée. Tout dépend évidemment de ce que l'on entend par subvention. Il résulte de cette possibilité que les autres entités peuvent avoir intérêt à exclure l'entité subventionnée et à réaliser seules le projet, même en supposant que $cc(Q)$ va rester inchangé après l'exclusion.[7]

Pour remédier à ce défaut de la méthode de Moriarity, Louderback (1976) a proposé de modifier cette dernière en posant $xb_i = ca_i(Q)$ et $t_i = c_i(q_i) - ca_i(Q)$ dans (1), ce qui donne :

$$x_i = ca_i(Q) + \frac{c_i(q_i) - ca_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n} \left(c_j(q_j) - ca_j(Q) \right)} cc(Q)$$

Louderback suppose que $c_i(q_i) \geq ca_i(Q)$, ce qui est assez réaliste. Sa règle consiste à imputer à chaque entité une contribution de base égale aux coûts qui peuvent lui être attribués. On répartit ensuite $cc(Q)$ selon un critère qui donne d'autant plus de poids à une entité que son coût de faire cavalier seul est élevé par rapport aux coûts qui peuvent lui être attribués directement. On fait donc supporter une grande partie de $cc(Q)$ à ceux qui semblent gagner le plus de la réalisation conjointe du projet. Il n'existe plus de subvention d'une entité par une autre et aucun sous-ensemble d'entités n'a intérêt à exclure les autres du projet global. On pose $x_i = ca_i(Q)$ quand $c_i(q_i) = ca_i(Q) \ \forall i$.

[7] C'est dans cette perspective que Gangolly (1981) a proposé une extension de la méthode de Moriarity au contexte où des sous-coalitions peuvent se former parmi les entités.

Balachandran et Ramakrishnan (1981) ont proposé une variante à la méthode de Louderback. Comme dans cette dernière, on pose $xb_i = ca_i(Q)$ dans (1) mais $t_i = w_i - ca_i(Q)$, d'où :

$$x_i = ca_i(Q) + \frac{w_i(q_i) - ca_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n}\left(w_j(q_j) - ca_j(Q)\right)} cc(Q)$$

On peut observer que :

$$w_i - ca_i(Q) = \begin{cases} c_i(q_i) - ca_i(Q) & \text{si } c_i(q_i) \le ca_i(Q) + cc(Q) \\ cc(Q) & \text{si } c_i(q_i) > ca_i(Q) + cc(Q) \end{cases}$$

si bien que, si $c_i(q_i) \le ca_i(Q) + cc(Q)$ pour tout *i*, cette méthode donne la même répartition que celle de Louderback. Si, au contraire, $c_i(q_i) > ca_i(Q) + cc(Q)$ pour tout *i*, elle donne $x_i = ca_i(Q) + \frac{1}{n} cc(Q)$. On pose $x_i = ca_i(Q)$ quand $w_i = ca_i(Q)$ $\forall i$.

3.2.2 Les méthodes inspirées de la théorie des jeux coopératifs

Le point de départ des méthodes présentées dans cette sous-section est la théorie des jeux coopératifs. Un jeu est une situation où plusieurs agents interagissent ou collaborent entre eux. Beaucoup de comportements économiques tombent dans cette catégorie, au même titre que les jeux proprement dits. L'objet de la théorie des jeux est l'étude de ce genre de situation. On distingue deux sortes de jeux : les jeux non-coopératifs et les jeux coopératifs. C'est à ce dernier type de jeu qu'on s'intéresse.

Un jeu coopératif met en relation un ensemble de joueurs *N*. Ces joueurs peuvent former des coalitions plus ou moins grandes. Formellement, les coalitions possibles sont les sous-ensembles *S* de *N*. Les coalitions obtiennent des gains qui résultent de la coopération de leurs membres. La description d'un jeu coopératif comprend donc une règle *g* qui définit les gains $g(S)$ que peuvent réaliser les différentes coalitions *S* une fois formées. La théorie des jeux coopératifs s'intéresse aux répartitions, i.e. au partage des gains entre les joueurs.

Le problème de la répartition des coûts communs peut être vu comme un jeu coopératif, appelé *jeu de coût*. Les entités de l'ensemble *N* sont les joueurs. Ils peuvent, par la coopération, réaliser des gains sous forme de réduction de coût. On peut cependant aborder ce jeu sous l'angle de la répartition des coûts plutôt que des gains. C'est l'approche adoptée ici.

Parmi les règles de répartition proposées pour les jeux coopératifs, la plus fréquemment utilisée est celle qu'a définie Shapley (1953), connue sous le nom de *valeur de Shapley*. C'est Shubik (1962) qui a suggéré de l'appliquer aux jeux de coût. Une autre contribution marquante de la théorie des jeux coopératifs est celle de Aumann et Shapley (1974). Ils proposent une généralisation de la méthode Shapley-Shubik au cas où il y a une infinité de joueurs (entités), associés à une infinité de niveaux de production possibles. La méthode Aumann-Shapley consiste à imputer à chaque entité la somme (l'intégrale) des coûts marginaux liés à sa demande le long du rayon qui va de l'origine au point qui représente la demande globale.

On peut imaginer d'autres types de sentier le long desquels calculer et imputer des coûts marginaux ou incrémentaux. Ces différents sentiers donnent lieu à autant de méthodes de répartition de coûts. Par exemple, la règle Shapley-Shubik est une moyenne de somme de coûts incrémentaux associés à un déplacement le long de sentiers constitués de segments de droites parallèles aux différents axes et allant de l'origine au point qui représente la demande globale.

Les méthodes sont présentées dans un ordre qui correspond à des sentiers de plus en plus complexes. Comme la plupart des méthodes font intervenir la notion de coût marginal ou incrémental, on commence par la tarification au coût marginal. On introduit ensuite la méthode Aumann-Shapley. Elle est suivie de la classe plus générale des méthodes de tarification selon les coûts incrémentaux le long d'un sentier quelconque. La méthode Shapley-Shubik suit comme un autre cas particulier de cette catégorie générale. La sous-section se termine avec la présentation d'une autre méthode empruntée à la théorie des jeux coopératifs, soit le nucléole, et avec le concept de cœur qui vient également de cette théorie. Ce dernier est avant tout une propriété des répartitions plutôt qu'une méthode de répartition stricto sensu.

3.2.2.1 La tarification au coût marginal

On connaît l'importance que les économistes attachent à la tarification au coût marginal. La dernière unité d'un bien ou service devrait être vendue à un prix égal à la valeur des ressources supplémentaires requises pour sa production. C'est une règle qui doit être respectée pour maximiser le profit dans un contexte de concurrence parfaite. C'est aussi ce qu'exige l'utilisation et la répartition efficace des ressources pour l'ensemble de la société, pour autant que les coûts marginaux soient correctement définis. Ce mode de tarification pose cependant problème puisqu'il donne généralement un surplus ou laisse un déficit, sauf en cas de rendement à l'échelle constant.

On examine d'abord l'application de ce principe dans le contexte des demandes unidimensionnelles. Étant donné un vecteur de demandes $Q=(q_1,\ldots,q_n)$ et la fonction de coût C, le tarif unitaire appliqué à chaque entité i devrait être égal au coût marginal de sa demande, i.e. au coût additionnel qu'entraîne la dernière unité demandée, en supposant les demandes des autres fixes. Dans le cas où les demandes sont parfaitement divisibles et où la fonction C est différentiable, le coût marginal est la dérivée partielle de C par rapport à son $i^{\text{ème}}$ argument, évaluée en Q. On la note $\partial_i C(Q)$. La tarification au coût marginal consiste à demander le montant $q_i \partial_i C(Q)$ à l'entité i.

La même formule est valable pour les demandes multidimensionnelles mais $\partial_i C(Q)$ doit maintenant être interprété comme le vecteur des dérivées partielles de C par rapport aux variables $q_{i1},\ldots,q_{im_i}$:

$$\partial_i C(Q) = \left(\partial_{i1} C(Q),\ldots,\partial_{im_i} C(Q)\right)$$

Le terme $q_i \partial_i C(Q)$ est donc maintenant le produit scalaire $\sum_{\ell=1}^{m_i} q_{i\ell}\partial_{i\ell} C(Q)$.

Le terme $q_i \partial_i C(Q)$ peut s'exprimer sous une autre forme. Pour un $Q \in \mathbb{R}_+^{nm}$ et une fonction C donnés, on définit d'abord la fonction $\hat{Q}:[0,1]^n \to \mathbb{R}_+^{nm}$ par :

$$\hat{Q}(\tau) = (\tau_1 q_1,\ldots,\tau_n q_n)$$

$\hat{Q}(\tau)$ est un nouveau vecteur de demandes obtenu en réduisant proportionnellement chacune des demandes originales q_i par le facteur τ_i , i.e. en multipliant chaque vecteur q_i par le nombre τ_i. L'argument τ est le vecteur des τ_i. On définit ensuite la fonction $\hat{C}:[0,1]\to\mathbb{R}$ par :

$$\hat{C}(\tau)=C\left(\hat{Q}(\tau)\right)=C(\tau_1 q_1,\ldots,\tau_n q_n)$$

En toute rigueur, il faudrait écrire $\hat{C}(\tau;Q,C)$ puisque cette fonction dépend évidemment de *Q* et *C*. Si les q_i sont des nombres réels (scalaires), cette définition revient simplement à changer les unités dans lesquelles les demandes sont exprimées pour des fractions des demandes originales. Avec des demandes multidimensionnelles, cela revient à se limiter à des changements proportionnels dans la demande de chaque agent. Il n'y a pas de perte de généralité pour autant puisque, en appliquant la règle de différentiation en chaîne, on obtient :

$$\partial_i\hat{C}(\tau)=q_i\partial_i C(\tau_1 q_1,\ldots,\tau_n q_n)$$

Avec cette nouvelle définition, la tarification au coût marginal consiste à demander le montant $\partial_i\hat{C}(1,\ldots,1)$ à l'entité *i*. Cette formulation peut sembler complexe mais il n’en est rien. Elle est particulièrement simple à appliquer.

Comme nous l’avons signalé plus haut, ce mode de tarification pose problème puisqu’il donne en général un surplus ou laisse un déficit, sauf en cas de rendement à l’échelle constant. Il ne résout donc pas le problème de la répartition du coût total. On pourrait toujours le compléter avec une formule de répartition proportionnelle du déficit ou du surplus qu'implique ce mode de tarification. Autrement dit on pourrait utiliser une règle de la forme :

$$x_i(Q,C)=\partial_i\hat{C}(1,\ldots,1)+\frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j}\left(C(Q)-\sum_{j=1}^n\partial_j\hat{C}(1,\ldots,1)\right)$$

Il s'agit évidemment d’une règle de la forme (1). Il est cependant difficile de donner une justification théorique à une telle règle. Un autre choix possible, et peut-être plus naturel, est $t_i=\partial_i\hat{C}(1,\ldots,1)$. Cela donne :

$$x_i(Q,C) = \partial_i \hat{C}(1,\ldots,1) + \frac{\partial_i \hat{C}(1,\ldots,1)}{\sum_{j=1}^n \partial_j \hat{C}(1,\ldots,1)} \left(C(Q) - \sum_{j=1}^n \partial_j \hat{C}(1,\ldots,1) \right)$$
$$= \frac{\partial_i \hat{C}(1,\ldots,1)}{\sum_{j=1}^n \partial_j \hat{C}(1,\ldots,1)} C(Q) = \frac{\partial_i C(Q) q_i}{\sum_{j=1}^n \partial_j C(Q) q_j} C(Q)$$

i.e. la *répartition proportionnelle aux coûts marginaux.* Cette règle a été analysée par Wang (2002). Nous montrons dans la section 3.6 qu'elle peut être caractérisée par un ensemble restreint de propriétés, à la manière des règles qui suivent.

3.2.2.2 La tarification à la Aumann-Shapley

Aumann et Shapley (1974) ont proposé une solution élégante au problème du surplus ou du déficit qu'implique la tarification au coût marginal. On considère le vecteur $(\lambda q_1,\ldots,\lambda q_n)$ où λ est un nombre réel. En faisant varier λ de 0 à 1, on obtient une infinité de telles suites, toutes proportionnelles entre elles. On calcule ensuite le coût marginal de chaque entité pour chaque demande $(\lambda q_1,\ldots,\lambda q_n)$, i.e. pour chaque valeur de λ, et on fait la somme de ces coûts marginaux. En utilisant ces sommes comme tarifs unitaires, il n'y a ni surplus ni déficit, du moins s'il n'y a pas de coûts fixes.

En termes mathématiques, la somme de ces coûts marginaux est définie par leur intégrale entre 0 et 1. En multipliant cette intégrale pour l'entité *i* par la demande q_i, on obtient la part des coûts totaux imputée à l'entité *i*. Formellement, on a donc :

$$x_i(Q,C) = \int_0^1 q_i \partial_i C(\lambda Q) d\lambda \tag{5}$$

Cette intégrale est en fait la somme des coûts marginaux le long du rayon qui va de l'origine au point *Q* dans l'espace des demandes. Dans le cas des demandes unidimensionnelles pour un bien privé, cette règle est celle de la tarification au coût moyen.[8]

[8] On a en effet $\partial_i C(\lambda q_1,\ldots,\lambda q_n) = c'(\lambda \sum_{j=1}^n q_j)$ pour tout *i*, d'où :

$$\int_0^1 q_i \partial_i C(\lambda Q) d\lambda = \int_0^1 q_i c'\left(\lambda \sum_{j=1}^n q_j \right) d\lambda = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^n q_j} c\left(\sum_{j=1}^n q_j \right) = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^n q_j} C(Q)$$

La formule (5) est également valable pour des demandes multidimensionnelles. Il s'agit d'interpréter $q_i \partial_i C$ comme un produit scalaire. Comme pour les coûts marginaux, on peut mettre la formule (5) sous la forme équivalente :

$$x_i(Q, C) = \int_0^1 \partial_i \hat{C}(\lambda, ..., \lambda) d\lambda$$

L'interprétation de la formule sous cette forme est intéressante. Non seulement les demandes de toutes les entités sont-elles réduites de façon proportionnelle dans le processus d'intégration mais, par définition de $\hat{C}$, le coût marginal de chaque entité est lui-même défini par rapport à des changements proportionnels de tous les éléments de sa demande.

La méthode Aumann-Shapley a été généralisée par Mirman, Samet et Tauman (1983) au cas où il y a un coût fixe (*CF*) à partager, le coût total étant alors la somme de ce coût fixe et du coût variable (*CV*). La méthode Aumann-Shapley ne procède qu'au partage de *CV*. On a donc :

$$CV = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \partial_i \hat{C}(\lambda, ..., \lambda) d\lambda$$

La généralisation proposée par Mirman, Samet et Tauman (1983) consiste à répartir *CF* proportionnellement aux $\int_0^1 \partial_i \hat{C}(\lambda, ..., \lambda) d\lambda$. La formule exacte s'écrit :

$$x_i(Q, C) = \left(1 + \frac{CF}{CV}\right) \int_0^1 \partial_i \hat{C}(\lambda, ..., \lambda) d\lambda$$

La méthode Aumann-Shapley consiste à faire la somme (prendre l'intégrale) des coûts marginaux le long du rayon qui va de l'origine au point *Q* dans l'espace des demandes. On pourrait cependant faire cette somme le long d'un autre sentier, ce qui donnerait une répartition différente. On peut même imaginer de travailler le long d'un sentier discret (ou linéaire par morceau), ce qui est d'ailleurs la seule façon de procéder lorsque les quantités demandées sont indivisibles.

3.2.2.3 La méthode Shapley-Shubik

Supposons que la demande totale de l'entité 1 doive être satisfaite avant celle de l'entité 2 et cette dernière avant celle de l'entité 3, etc. Supposons également qu'on convienne de faire supporter à l'entité 1 la totalité du coût de sa demande, soit $c_1(q_1)$, et à l'entité 2 le coût supplémentaire qu'entraîne l'adjonction de sa demande à celle de l'entité 1, soit $C(q_1, q_2, 0, ..., 0) - c_1(q_1)$. De façon similaire, l'entité 3 devra supporter $C(q_1, q_2, q_3, 0, ..., 0) - C(q_1, q_2, 0, ..., 0)$ et ainsi de suite.

L'ordre d'apparition des entités est évidemment important. Certaines entités pourraient donc contester l'ordre choisi. Shapley (1953) a apporté une réponse élégante à ce conflit. Elle consiste à supposer que l'ordre dans lequel les entités se joignent à une coalition et l'ordre dans lequel les coalitions se forment est aléatoire, avec des chances égales d'arriver premier, deuxième, etc. Si, pour un ordre d'arrivée donné, chacun se voit imputer un montant égal au coût incrémental qu'il impose à la coalition à laquelle il se joint, chacun est alors en mesure de calculer, ex ante, l'espérance du coût qui lui sera imputé. La répartition qui consiste à imputer aux différentes entités un montant égal à cette espérance, autrement dit la moyenne de ces coûts incrémentaux, est appelée *valeur de Shapley*.[9] On donne le nom de Shapley-Shubik à cette méthode parce que c'est Shubik qui a proposé de l'appliquer à la répartition des coûts.

Avec trois entités, il y a six ordres d'arrivée possibles représentés par autant de suites :

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (3,1,2),\ (2,3,1),\ (3,2,1)$$

La probabilité est donc $\frac{1}{3}$ que l'entité 1 entre en premier dans le consortium, $\frac{1}{6}$ qu'elle entre en deuxième derrière l'entité 2, $\frac{1}{6}$ qu'elle entre encore en deuxième mais derrière l'entité 3 et $\frac{1}{3}$ qu'elle arrive enfin en troisième, l'ordre dans lequel arrivent les deux autres entités n'ayant alors aucune importance.

Pour définir la méthode Shapley-Shubik, il est commode de poser $\hat{c}(S) = C(Q^S)$. Rappelons-nous que Q^S est le vecteur Q dans lequel toutes les demandes autres que celle des entités de S

[9] Stricto sensu, ce que doit payer le joueur *i* est la valeur de Shapley du jeu pour ce joueur.

sont ramenées à 0. La fonction $\hat{c}$ est définie pour tous les sous-ensembles d'entités. On a en particulier $\hat{c}(\{i\}) = c_i q_i$. Cette fonction s'entend pour une demande Q donnée. Elle définit ce qu'on appelle un *jeu de coût*.

Pour le cas de trois alternatives, la méthode Shapley-Shubik est définie par :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{3}\hat{c}(\{1\}) + \frac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,2\}) - \hat{c}(\{2\})\right] + \frac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,3\}) - \hat{c}(\{3\})\right] + \frac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{2,3\})\right] \\
x_1 &= \frac{1}{3}\hat{c}(\{2\}) + \frac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,2\}) - \hat{c}(\{1\})\right] + \frac{1}{6}\left[\hat{c}(\{2,3\}) - \hat{c}(\{3\})\right] + \frac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{1,3\})\right] \\
x_1 &= \frac{1}{3}\hat{c}(\{3\}) + \frac{1}{6}\left[\hat{c}(\{1,3\}) - \hat{c}(\{1\})\right] + \frac{1}{6}\left[\hat{c}(\{2,3\}) - \hat{c}(\{2\})\right] + \frac{1}{3}\left[\hat{c}(\{1,2,3\}) - \hat{c}(\{1,2\})\right]
\end{aligned}
$$

On vérifie que $x_1 + x_2 + x_3 = \hat{c}(N) = C(Q)$. De façon plus générale, la répartition par la valeur de Shapley est définie par :

$$
x_i = \sum_{S \subset N} \frac{|S \setminus \{i\}|!\,|N \setminus S|!}{|N|!}\left[\hat{c}(S) - \hat{c}(S \setminus \{i\})\right]
$$

où $|S|$ représente le nombre d'éléments dans *S*.

Certains voient ce mode de répartition comme celui qui pourrait résulter d'une négociation entre les entités. Biddle et Steinberg (1985) en parlent comme d'un “costless surrogate for the allocation that would be obtained through bargaining.”

Une variante consiste à admettre que certaines entités ont une stature telle que les ordres d'entrée dans le consortium ne sont pas équiprobables. Certaines entités devraient en faire partie avant même que d'autres puissent joindre le consortium, ce qui permettrait de représenter leurs pouvoirs de négociation respectifs.

On pourrait aussi appliquer la valeur de Shapley à la répartition des bénéfices tirés de la coopération, i.e. aux coûts épargnés, plutôt qu'aux coûts. Les résultats ne seraient pas nécessairement les mêmes.

S'il y a un coût fixe, on peut le traiter de deux façons. La première consiste à l'inclure dans chacun des $\hat{c}(S)$, ce qui revient à le répartir de façon égalitaire entre toutes les entités. La deuxième consiste à appliquer la méthode Shapley-Shubik aux seuls coûts variables et à répartir le coût fixe selon une règle quelconque, par exemple dans les mêmes proportions que les coûts variables, comme cela a été proposé par Mirman, Samet et Tauman (1983) pour la méthode Aumann-Shapley.

3.2.2.4 Le nucléole

Un autre concept emprunté à la théorie des jeux coopératifs est celui de nucléole. L'idée derrière ce concept est de chercher à maximiser le bien-être de la moins heureuse des coalitions.

Étant donné une répartition $x = (x_1, ..., x_n)$ et un sous-ensemble *S* non-vide de *N* et différent de *N*, on définit l'excédent de la coalition *S* avec la répartition *x* par :

$$e(x,S) = \hat{c}(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Le nombre $e(x,S)$ est ce que gagne la coalition *S* si elle accepte la répartition *x* plutôt que de répondre elle-même aux besoins de ses membres. On désigne ensuite par $e(x)$ le vecteur des $(2^n - 2)$ valeurs de $e(x,S)$ pour $S \in N$, ordonnées de la plus petite à la plus grande. Le nucléole[10] est défini comme l'unique répartition x^* qui maximise lexicographiquement $e(x)$:

$$e(x) \leq_\ell e(x^*) \text{ pour toute répartition } x$$

où $\leq_\ell$ désigne la relation « inférieure ou égale à au sens lexicographique ».[11] Autrement dit, x^* est la répartition qui maximise le plus petit gain d'une coalition, de même que le deuxième

[10] En toute rigueur, on devrait parler de pré-nucléole, le terme nucléole étant normalement réservé aux répartitions qui satisfont $x_i \leq c(\{i\})$, une restriction qu'on n'impose pas.

[11] Un vecteur $e = (e_1, ..., e_m)$ est *lexicographiquement inférieur* à un autre $d = (d_1, ..., d_m)$ si la première composante de *e* différente de la composante correspondante de *d* est plus petite que cette dernière. Par exemple, (3,1,9) est lexicographiquement plus petit que (3,2,1).

plus petit gain, le troisième, etc. C'est aussi le point central, au sens géométrique, de l'ensemble des répartitions possibles.

Il existe autant de variantes du nucléole que de façons de définir l'excédent d'une coalition. Certains ont proposé de travailler avec l'excédent per capita, i.e. :

$$e(x,S)=\frac{\hat{c}(S)-\sum_{i\in S}x_i}{|S|}$$

On obtient alors le nucléole per capita ou le nucléole normalisé.

3.2.2.5 Le cœur (noyau)

Le cœur n'est pas en soi une méthode de répartition. Il détermine plutôt un ensemble de répartitions des coûts, qui peut d'ailleurs être vide. Il s'agit des répartitions qu'aucune coalition ou sous-ensemble d'entités ne peut contester sous prétexte qu'elles imputeraient à ses membres une charge supérieure au coût auquel la coalition en question pourrait seule satisfaire aux demandes de ses membres. Plus précisément, c'est l'ensemble des répartitions qui satisfont les deux conditions suivantes :

$$\sum_{i\in S}x_i\le\hat{c}(S),\quad \text{pour tout sous-ensemble } S \text{ de } N$$
$$\sum_{i\in S}x_i=\hat{c}(N)$$

La première condition spécifie que, quelle que soit la coalition *S*, la somme des coûts attribués à ses membres ne peut dépasser le coût total $\hat{c}(S)$ auquel cette coalition doit faire face si elle décide de se passer des autres. La deuxième condition stipule que la somme des coûts attribués à toutes les entités doit couvrir exactement le coût total de produire l'ensemble des demandes. Cela laisse supposer que c'est la grande coalition qui va se former.

On peut définir le cœur, de façon équivalente, comme l'ensemble des répartitions qui satisfont les conditions :

$$\sum_{i\in S}x_i\ge\hat{c}(N)-\hat{c}(N\setminus S),\quad \text{pour tout sous-ensemble } S \text{ de } N$$
$$\sum_{i\in S}x_i=\hat{c}(N)$$

Sous cette forme, chaque coalition se voit imputer un montant au moins aussi élevé que le coût supplémentaire qu'elle impose à la coalition complémentaire $N \setminus S$ lorsqu'elle la rejoint pour former la grande coalition *N*. Si ce n'était pas le cas, les membres de la coalition $N \setminus S$ verseraient un subside aux membres de la coalition *S*, d'où une objection possible de leur part. Il se peut que les conditions qui définissent le cœur soient mutuellement incompatibles. Le cœur est alors vide. Il existe des conditions sur les fonctions de coût qui garantissent l'existence du cœur. Lorsqu'il existe, il peut par contre être très grand.

Le cœur est davantage une propriété désirable des diverses méthodes de répartition. Une répartition se trouve ou non dans le cœur. Le fait d'appartenir au cœur confère à une répartition un caractère de crédibilité non négligeable. Par exemple, le nucléole appartient au cœur lorsque celui-ci existe. La valeur de Shapley appartient au cœur pour les jeux de coûts concaves, i.e. ceux où les coûts incrémentaux de joindre un sous-ensemble d'entités décroît à mesure que ce sous-ensemble augmente en taille. Autrement, l'appartenance au cœur n'est pas garantie

3.2.3 La répartition séquentielle

La méthode de répartition séquentielle a été conçue à l'origine pour le cas des demandes portant sur un seul bien privé. On va commencer par présenter la méthode dans ce contexte plus simple. On l'étendra ensuite au contexte plus général décrit dans la sous-section 3.1.1.

3.2.3.1 Le cas des demandes unidimensionnelles

Les demandes des *n* entités sont données par des nombres q_i, $i = 1,...,n$. On suppose $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_n$. Typiquement, avec les méthodes de ce type, toutes les entités se voient imputer une part égale du coût d'un projet ou d'une capacité tout juste suffisante pour répondre aux besoins de *n* entités ayant une demande identique à la plus petite des demandes, celle de l'entité 1 ici. Ensuite, les $n-1$ autres entités se voient imputer, en plus, une part égale de l'accroissement de coût qu'entraînerait un accroissement de capacité suffisant pour répondre à des demandes de leur part qui seraient toutes égales à celle de l'entité 2. On continue ainsi à imputer les coûts associés à des accroissements de capacité nécessités par des demandes de plus en plus grandes jusqu'à l'entité *n*.

Dans le cas où les coûts incrémentaux croissent avec l'ampleur des demandes, on évite ainsi que les entités ayant des demandes plus faibles se voient imputer des coûts reliés aux externalités imposées par ceux qui ont des demandes plus fortes. À l'inverse, si les coûts incrémentaux diminuent avec l'ampleur des demandes, on évite que les entités ayant des demandes plus faibles profitent des externalités amenées par ceux qui ont des demandes plus grandes.

Pour décrire cette méthode de façon formelle, on introduit des suites de demande intermédiaire $Q_i,\ i=1,\ldots,n$ de même dimension que $Q=(q_1,\ldots,q_n)$. Elles sont définies par :

$$q_i^j = \min\left\{q_i, q_j\right\}$$

Autrement dit :

$$Q^i = (q_1,\ldots,q_{i-1},q_i,\underbrace{q_i,\ldots,q_i}_{n-1 \text{ fois}})$$

Les *i* premiers éléments de Q^i sont ceux de *Q*. Les $n-i$ autres sont tous remplacés par q_i. Il ne faut pas confondre Q^i avec $Q^{\{i\}}$. On a évidemment $Q^{\{n\}}=Q$ et on pose $Q^0=(0,\ldots,0)$. La méthode de répartition séquentielle est définie par :

$$\begin{aligned}
x_1(Q,C) &= \frac{C(Q^1)}{n} \\
x_2(Q,C) &= x_1(Q,C) + \frac{C(Q^2)-C(Q^1)}{n-1} \\
x_3(Q,C) &= x_2(Q,C) + \frac{C(Q^3)-C(Q^3)}{n-2} \\
&\vdots \\
x_n(Q,C) &= x_{n-1}(Q,C) + C(Q) - C(Q^{n-1})
\end{aligned}$$

La formule générale est :

$$x_i(Q,C) = \sum_{j=1}^{i} \frac{C(Q^j)-C(Q^{j-1})}{n+1-j}, \quad i=1,\ldots,n \tag{6}$$

Cette méthode satisfait : $\sum_{i=1}^{n} x_i(Q,C) = C(Q)$. De plus $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$. À noter que, s'il y a un coût fixe, cette méthode le répartit également entre toutes les entités dont la demande est positive. Ce coût fixe est en effet compris dans le premier $C(Q^j)$ positif.

3.2.3.2 Le cas des demandes multidimensionnelles

On peut envisager une généralisation de la méthode présentée au paragraphe précédent au cas des demandes multidimensionnelles. L'approche présentée ici a été initiée par Koster et al. (1998) pour le cas de plusieurs biens homogènes et par Sprumont (1998) pour les biens hétérogènes. Téjédo et Truchon (2000) généralisent la méthode au contexte plus général envisagé ici.

Un premier problème qui se présente dans cette démarche est celui d'ordonner des demandes qui ne sont peut-être pas comparables. La solution adoptée consiste à ordonner les demandes en termes des coûts qu'entraînerait leur réalisation indépendante :

$$c_1(q_1) \leq c_2(q_2) \leq ... \leq c_n(q_n) \tag{7}$$

Dans le cas unidimensionnel, l'ordre $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_n$ est équivalent à celui établi en (7).

Avec des demandes multidimensionnelles, se pose aussi le problème de la construction des demandes intermédiaires Q^i. Elle ne peuvent évidemment pas l'être comme pour les demandes unidimensionnelles puisque qu'elles peuvent porter sur des biens différents. Cependant, dans le cas unidimensionnel, Q^1 est défini de manière à ce que :

$$c_1(q_1) = c_2(q_2^1) = ... = c_n(q_n^1) \tag{8}$$

Q^2 de manière à ce que :

$$c_2(q_2) = c_3(q_3^2) = ... = c_n(q_n^2) \tag{9}$$

etc. Autrement dit, Q^1 est défini de manière à ce que le coût de faire cavalier seul soit le même pour tous, Q^2 de manière à ce que le coût de faire cavalier seul soit le même pour les entités 2 à *n*, etc. C'est ce qui est fondamental.

Pour construire Q^1, il s'agit donc de réduire les demandes des entités 2 à *n* jusqu'à ce que leur coût de faire cavalier seul soit le même que pour l'entité 1 et ainsi de suite. Il y a cependant plusieurs façons de réduire la demande d'une entité. Ici, on se limite aux réductions proportionnelles, i.e. le long d'un rayon. Téjédo et Truchon (2002) envisagent des réductions le long de sentiers plus généraux. De façon précise, on définit :

$$Q^1 = \left(\tau_1^1 q_1, \ldots, \tau_n^1 q_n\right)$$

où $\tau_1^1 = 1$ et où τ_i^1 sont les solutions des équations :

$$c_i(\tau_i q_i) = c_1(q_1), \quad i = 2, \ldots, n$$

De façon similaire, $Q^2 = (\tau_1^2 q_1, \ldots, \tau_n^2 q_n)$ où $\tau_1^2 = \tau_2^2 = 1$ et où les autres τ_i^2 sont les solutions des équations :

$$c_i(\tau_i q_i) = c_2(q_2), \quad i = 3, \ldots, n$$

et ainsi de suite jusqu'à *n-1*. Comme dans le cas unidimensionnel, on a $Q^n = Q$. Il s'agit ensuite de calculer les $C(Q^j),\ j = 1, \ldots, n$ et de les utiliser dans les fonctions x_i définies en (6).

Confronté à la diversité des règles de répartition à disposition la tentation pourrait être forte de choisir une méthode sur la base d'un seul ou même de plusieurs exemples ou sur la base des répartitions qu'elle peut donner dans une situation particulière. C'est malheureusement trop souvent la façon de faire. Il en résulte inévitablement des frustrations et des conflits. C'est souvent les cas lorsqu'arrivent de nouveaux partenaires ou que le contexte change de toute autre manière.

Idéalement, il faudrait choisir une méthode sur la base de ses propriétés, avant même de connaître les résultats qu'elle peut donner, un peu comme un pays se dote d'une constitution sans connaître toutes les répercussions qu'elle aura sur les citoyens actuels et à venir. Dans les sections qui suivent, on cherche à départager les méthodes de partage de coûts sur la base des propriétés ou principes qu'elles peuvent ou non satisfaire. On verra que certaines méthodes peuvent être caractérisées comme étant les seules à satisfaire à un certain sous-ensemble de propriétés.

3.3 Les grands principes

Comme l'avons affirmé plus tôt dans le rapport, le choix d'une méthode de partage des coûts communs devrait se faire sur la base de ses propriétés par rapport aux propriétés des méthodes alternatives.

En effet, il est en général contre-indiqué de choisir une méthode sur la simple base d'un seul ou même de quelques exemples, comme le font traditionnellement les organisations ou consortiums, à la suite de longues et difficiles négociations entre les parties, chacune privilégiant évidemment la méthode qui lui est la plus favorable. Il est beaucoup plus simple et logique d'identifier une méthode parmi l'ensemble des méthodes possibles sur la base des propriétés de ces méthodes avant même de connaître les résultats qu'elles peuvent donner dans des applications concrètes.

Notons que même s'il est plus simple de s'accorder sur des propriétés (en nombre fini) que sur des répartitions (en nombre infini), il peut paraître possible de simplifier encore le problème du choix de la méthode de partage des coûts en fondant le choix sur des principes plutôt que sur des propriétés. Comme nous le verrons plus loin dans le rapport cette tentative de simplification n'est pas sans poser problèmes. En effet, plusieurs grands principes peuvent être associés à une même propriété. Cet aspect du problème sera discuté dans la section 3.5. Il n'en demeure pas moins qu'il est intéressant de s'attarder sur les principes qui sous-tendent les propriétés des méthodes de partage de coûts. Au sein de cette étude trois de ces principes ont retenu notre attention : l'*équité*, la *cohérence* et l'*efficacité/efficience*.

L'équité, la cohérence et l'efficacité/efficience, sont des concepts centraux dans le domaine du partage des coûts et de la tarification. L'efficacité se justifie par la recherche de critères rationnels de performance lors de la définition et de la mise en œuvre du partage des coûts et de la tarification. L'équité et la cohérence peuvent être considérées comme des contraintes qui doivent être vérifiées pour garantir le succès d'une nouvelle pratique tarifaire. De nombreux autres principes pourront être discutés lors de rencontre avec le partenaire (à titre d'exemple, les principes de légalité ou de transparence).

3.3.1 L'équité

Dans son acception générale, le terme « équité » désigne la qualité de ce qui est juste et impartial. Le problème avec le sentiment d'équité est que la perception qu'en ont les consommateurs en est très subjective. Une différence est parfois vue comme légitime, parfois comme illégitime, quelle que soit son objectivité. Cela résulte de la diversité des définitions possibles de l'équité. La perception des inégalités fait en effet appel à des mécanismes complexes de comparaison, fonction des inégalités objectives mais aussi de nombreuses autres variables. L'équité est un mot normatif et, contrairement à l'*égalité* qui qualifie, sans jugement de valeur, une distribution, l'équité suppose un jugement. Enfin, soulignons le fait que bien que les concepts d'équité ne soient ni bons, ni mauvais, les méthodes utilisées pour le suivi et la poursuite de l'équité peuvent s'avérer plus ou moins cohérentes (Mooney (1994)) et générer des distorsions par rapport à la solution optimale.

Notons que bien qu'il n'y ait pas de critère universel permettant d'évaluer l'équité, le consensus général veut que celle-ci progresse chaque fois que l'on réduit les inégalités extrêmes. Dans le cadre de ce projet, la solution extrême qui consiste à attribuer l'ensemble des coûts à un seul et unique groupe de consommateurs peut être considérée comme inéquitable. Sommes-nous bien plus avancés ? Non car on ne s'entend cependant guère sur ce que serait exactement une répartition équitable. Le contexte nous apparaît donc primordial pour définir ce principe.

Compte tenu des quelques informations dont nous disposons nous réduisons le principe d'équité au concept d'équité horizontale défini ci-dessous. Le concept d'équité verticale, également défini dans le paragraphe suivant, traduit l'idée d'une redistribution et ne sera qu'effleuré dans ce rapport. En effet, les méthodes de partage de coûts sont d'abord et avant tout un outil de répartition des coûts et non de redistribution.[12] L'aspect redistributif ne vient qu'une fois la méthode de partage des coûts implémentée et uniquement si la solution obtenue

[12] Notons qu'il est possible d'associer une certaine forme d'équité à certaines méthodes : le nucléole par exemple minimise la contribution du plus faible. Il n'en demeure pas moins que ce n'est pas cet aspect du nucléole qui doit conduire à sa sélection lors du partage des coûts mais bien les propriétés qu'il vérifie.

s'avère difficilement applicable. Dans ce cas on tentera de la rendre acceptable en minimisant certaines distorsions par rapport à la solution « première ».[13]

- *L'équité horizontale* est un principe qui établit que ceux qui sont dans des conditions identiques ou similaires doivent payer un niveau équivalent de taxe ou doivent recevoir la même part des avantages. Adaptée au contexte décrit dans la partie 2, l'équité horizontale se traduira par des contributions identiques pour des clients « similaires ». Nous discernerons autant de concept d'équité horizontale qu'il existe de significations du terme « similaire ».
- *L'équité verticale* est un principe qui dit que ceux qui sont dans des circonstances différentes eues égard aux considérations d'équité doivent être traités de façon différente. Adaptée au contexte décrit dans la partie 2, l'équité verticale se traduira par des contributions différentes de clients pouvant être considérés comme similaires, du point de vue par exemple des coûts de faire cavalier seul ou de la demande, mais étant dans des situations différentes.

3.3.2 La cohérence

La cohérence est un principe qui garantit que le partage des coûts se fera de manière harmonieuse, logique, c'est-à-dire exempt de toute sorte de contradiction mutatis mutandis. À titre d'exemple on peut souhaiter qu'une règle de partage des coûts donne les mêmes résultats, peu importe les unités de mesure qui sont utilisées ou peut importe qu'on l'applique séparément à divers éléments de coût ou globalement à l'ensemble des coûts ou encore qu'on l'applique séparément à certaines entités ou à l'ensemble des entités.

3.3.3 L'efficacité

Le principe d'efficacité peut, au même titre que le principe d'équité, souffrir de multiples définitions. L'efficacité est le rapport entre les résultats obtenus et les objectifs visés. Il ne faut pas confondre l'efficacité avec l'efficience qui est le rapport entre les résultats obtenus et

[13] La solution première est ici celle qui a été obtenue par la méthode de partage des coûts choisie au départ par l'ensemble des entités.

les ressources utilisées pour les atteindre. Ainsi, une méthode de partage de coûts est efficace si elle permet de réaliser entièrement l'objectif initial et elle est efficiente si un minimum de ressources sont utilisées pour l'atteinte de cet objectif. Dans le cadre de ce premier rapport nous ne connaissons pas les objectifs visés par Gaz de France du fait de son statut de Société Anonyme soumise à une mission de service public. Il nous est donc difficile de définir pleinement le principe d'efficacité.

Notons que d'autres principes peuvent être « associés » à l'efficacité : la participation et l'incitation en sont deux exemples. Dans le cadre du projet MECONG, le cahier des charges stipule que le principe d'incitation consiste à minimiser le risque de départ de la clientèle à la concurrence. Compte tenu des informations dont nous disposons nous ne pouvons que réduire le principe d'efficacité à celui de l'incitation.

Cette simplification ne résout cependant pas le problème puisque la connaissance de la concurrence est une condition sans laquelle nous ne pourrons pas travailler concrètement sur ce principe.

3.4 Les propriétés

Une méthode peut produire des résultats satisfaisants dans un contexte particulier mais elle peut donner des aberrations lorsque ce contexte vient à changer (arrivée d'un nouveau partenaire, changements dans les besoins, les coûts, etc.). Idéalement, il faudrait faire le choix d'une méthode sur la base de ses propriétés, avant même de connaître les résultats qu'elle peut donner. Aussi, est-il important de chercher à départager les méthodes de répartition des coûts sur la base de propriétés générales qu'elles peuvent ou non satisfaire. L'objectif de cette section est de dresser une liste relativement exhaustive des principales propriétés qui peuvent s'avérer intéressante dans le cadre du projet MECONG.

Rappelons qu'un problème de partage de coûts est défini par le vecteur des demandes de n entités, $Q = (q_1, ..., q_n)$, où les composantes q_i peuvent également être des vecteurs, et par une fonction C qui donne le coût $C(Q)$ de satisfaire à la demande Q. Une règle de partage de coûts est une fonction x qui, pour toute demande Q et toute fonction de coût C, spécifie la part du coût $C(Q)$ supportée par les différentes entités. On note $x_i(Q,C)$ la charge imputée à l'entité i et $x(Q,C)$ le vecteur de ces dernières.

On représente la demande d'un sous-ensemble S d'entités par Q^S, qui est le vecteur Q dans lequel toutes les demandes, autres que celle des entités de S, sont ramenées à 0. Le coût de satisfaire uniquement aux demandes des entités de S est donc $C(Q^S)$. Comme cas particulier, on a $C(Q^{\{i\}})$, qui est le *coût de faire cavalier seul*. On pose également $c_i(q_i) = C(Q^{\{i\}})$ pour chaque entité i.

On présente ici 29 propriétés regroupées en sept catégories qui font l'objet d'autant de sous-sections. Un exemple illustre chacune de ces propriétés.

3.4.1 Le traitement égalitaire des équivalents

Le minimum qu'on puisse demander à une règle de partage de coûts, c'est qu'elle traite de la même façon les entités qui ont des demandes comparables et en particulier des demandes identiques. C'est ce qu'exige la condition (TEE) ci-dessous. De manière plus générale, la comparaison entre les demandes de deux entités pose problème lorsqu'elles portent sur des biens ou caractéristiques différentes. Toutefois, on peut considérer ces demandes comme étant suffisamment similaires si les quantités demandées sont les mêmes et si on peut interchanger les demandes des deux entités sans changer le coût total. C'est le cas lorsque la fonction de coût est symétrique par rapport aux demandes des deux entités. De façon précise, la fonction C est symétrique par rapport aux demandes de deux entités i et j si $C(Q) = C(Q_{ij})$ pour toute demande Q et la demande Q_{ij} obtenue en interchangeant simplement q_i et q_j dans Q. La condition (S), plus forte que (TEE), exige que de telles demandes soient également traitées de la même façon. Finalement, on peut considérer des demandes comme étant équivalentes si elles satisfont un même critère (le coût de faire cavalier seul par exemple). La condition (TE), plus forte que les deux autres, exige que des demandes ayant le même coût de faire cavalier seul soient également traitées de la même façon. Une dernière condition va plus loin. Elle requiert que les contributions exigées des entités aillent dans le sens de leurs coûts de faire cavalier seul.

Traitement égalitaire des égaux (TEE) Cette propriété dit que, si les biens sont homogènes et si deux entités demandent les mêmes quantités de ce bien, elles devraient se voir imputer la même part des coûts totaux. De façon formelle, $q_i = q_j$ devrait entraîner $x_i(Q,C) = x_j(Q,C)$.

Exemple : *soit le problème de partage de coûts à 3 entités dont la fonction de coût est :*

$$C:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}: C(Q) = 4 + Q^2 = 4 + \left(q_1 + q_2 + q_3\right)^2$$

Supposons que $Q = (1,1,2)$ *et donc que* $C(Q) = 20$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges* $x(Q,C) = (4,4,12)$ *vérifie la propriété (TEE) pour le vecteur de demande Q. En effet, les entités* 1 *et* 2 *qui ont des demandes identiques* $q_1 = q_2 = 1$ *se voient imputer la même charge* $x_1(Q,C) = x_2(Q,C) = 4$.

Symétrie (S) Une règle de partage de coûts satisfait à la symétrie si $q_i = q_j$ entraîne $x_i(Q,C) = x_j(Q,C)$, lorsque la fonction C est symétrique par rapport aux demandes des entités *i* et *j*. Cette propriété est en fait un cas particulier de (TE).

Exemple : *soit le problème de partage de coûts à 3 entités dont la fonction de coût est :*

$$C:\mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}: C(Q) = q_1 + q_2 + q_1 q_2 + q_3$$

Cette fonction est symétrique par rapport aux demandes des entités 1 *et* 2*. Supposons que* $Q = (3,3,6)$ *et donc que* $C(Q) = 21$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges* $x(Q,C) = (5,5,11)$ *vérifie la propriété (S) pour le vecteur de demande Q. En effet, les entités* 1 *et* 2 *qui ont des demandes identiques* $q_1 = q_2 = 3$ *se voient imputer la même charge* $x_1(Q,C) = x_2(Q,C) = 5$ *car la fonction de coût est symétrique rapport aux demandes de ces entités.*

Traitement égalitaire des équivalents (TE) Cette propriété dit que, si deux entités ont des coûts de faire cavalier seul identiques, elles devraient se voir imputer la même part des coûts totaux. De façon formelle, $c_i(q_i) = c_j(q_j)$ devrait entraîner $x_i(Q,C) = x_j(Q,C)$.

Exemple : *soit le problème de partage de coûts à 3 entités dont la fonction de coût est :*

$$C:\mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} : C(Q) = 5 + q_1 q_2 + q_3$$

À partir de cette fonction, on a $c_1(q_1) = c_2(q_2) = 5$. *Supposons que* $Q = (1,3,4)$ *et donc que* $C(Q) = 12$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges* $x(Q,C) = (3,3,6)$ *vérifie la propriété (TE) pour le vecteur de demande Q. En effet, les entités* 1 *et* 2 *qui ont les mêmes coûts de faire cavalier seul se voient imputer la même charge* $x_1(Q,C) = x_2(Q,C) = 3$.

Préservation des rangs (RG) Selon cette propriété, les contributions relatives aux coûts totaux des différentes entités devraient aller dans le sens de leurs coûts de faire cavalier seul. De façon formelle, $c_i(q_i) \le c_j(q_j)$ devrait entraîner $x_i(Q,C) \le x_j(Q,C)$.

Exemple : *soit le problème de partage de coûts à 3 entités dont la fonction de coût est :*

$$C:\mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} : C(Q) = 5 + q_1 q_2 + q_2 + q_3$$

À partir de cette fonction, on a $c_1(q_1) = 5,\ c_2(q_2) = 5 + q_2$ et $c_3(q_3) = 5 + q_3$. *Supposons que* $Q = (1,3,4)$ *et donc que* $C(Q) = 15$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges* $x(Q,C) = (2,6,7)$ *vérifie la propriété (TE) pour le vecteur de demande Q. En effet, les charges imputées aux trois entités* $x_1(Q,C) = 2 \le x_2(Q,C) = 6 \le x_2(Q,C) = 7$ *sont ordonnées de la même manière que coûts de faire cavalier seul* $c_1(q_1) = 5 \le\ c_2(q_2) = 11 \le c_3(q_3) = 12$.

Remarque 1 La propriété (RG) implique (TE), qui implique (S), qui implique (TEE).

3.4.2 Le principe séquentiel

Dans certaines situations, on peut se préoccuper de l'impact des demandes importantes sur les contributions des entités dont les demandes sont plus faibles. Par exemple, s'agissant de partager le coût d'un embranchement routier menant à différents sites en forêt, les tenants des sites les plus rapprochés de la route principale peuvent souhaiter ne pas être à la merci de ceux qui pourraient aller s'installer plus loin. A l'inverse, dans un projet où les économies d'échelle sont importantes, une entité ayant de gros besoins peut souhaiter que ce ne soit pas les petites qui profitent, à ses dépens, des économies d'échelle dont elle est responsable. Les propriétés qui sont présentées dans cette sous-section stipulent l'invariance des contributions exigées des petits par rapport à l'ampleur des plus grandes demandes. Elles sont à la base des règles de répartition séquentielle.

La première de ces propriétés est énoncée directement en termes de l'ampleur des demandes, telles que mesurées par les quantités demandées. Cette définition a du sens dans le contexte où les entités exigent un même bien privé et où elles peuvent être ordonnées en termes des quantités demandées. Dans un contexte plus général, les quantités demandées ne sont pas nécessairement comparables entre elles. Comment ordonner les entités dans un tel contexte ? La réponse de Sprumont (1998) à cette question est d'ordonner les entités par rapport aux contributions exigées d'elles selon la règle de partage envisagée. Cela donne lieu au principe séquentiel. Dans un contexte général où les demandes peuvent prendre toutes sortes de formes, le principe séquentiel est très exigeant. On peut l'affaiblir et exiger seulement que les contributions des petits ne changent pas dans l'éventualité où les plus gros augmentent leurs demandes de façon proportionnelle. En résulte alors le principe séquentiel radial.

Insensibilité à l'ampleur des plus grandes demandes (PG) Cette propriété exige que la contribution d'une entité ne soit pas affectée par l'ampleur des demandes plus grandes que la sienne. Une entité ne devrait pas subir les externalités associées à ces plus grandes demandes, ou en profiter selon le cas. On la définit formellement comme suit. Soit une entité *i* et deux demandes Q et Q' telles que :

- $q'_j = q_j$ pour $j = i$ et pour tout *j* tel que $q_j < q_i$,
- $q'_j \geq q_j$ pour tout $j \neq i$ tel que $q_i \leq q_j$.

On devrait alors avoir $x_i(Q,C) = x_i(Q',C)$.

Exemple : *supposons dans un premier temps que, lors d'un problème de partage de coûts à 3 entités, le vecteur de demande soit de la forme* $Q = (1,3,4)$. *Dans un second temps, l'entité 3 accroît sa demande. Supposons qu'on obtienne alors le vecteur de demande* $Q' = (1,3,6)$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges*

$x(Q,C)=(3,5,9)$ et $x(Q',C)=(3,5,13)$ vérifie la propriété (PG) pour les vecteurs de demande Q et Q'. En effet, les contributions des entités 1 *et* 2 *ne sont pas affectées par l'accroissement de la demande de l'entité 3 : $x_1(Q,C)=x_1(Q',C)=3$ et $x_2(Q,C)=x_2(Q',C)=5$.*

Principe séquentiel (PS) Il s'agit d'une version plus forte de la propriété précédente. Elle dit que la contribution d'une entité ne devrait pas être affectée par l'ampleur des demandes des entités dont les contributions sont plus élevées que la sienne. On la définit formellement comme suit. Soit une entité i et deux demandes Q et Q' telles que :

- $q'_j = q_j$ pour tout $j = i$ et pour tout j tel que $x_j(Q,C) < x_i(Q,C)$,
- $q'_j \geq q_j$ pour tout j tel que $x_i(Q,C) \leq x_j(Q,C)$.

On devrait alors avoir $x_i(Q,C) = x_i(Q',C)$.

***Exemple :** supposons dans un premier temps que, lors d'un problème de partage de coûts à 4 entités, le vecteur de demande soit de la forme $Q=(1,3,5,7)$. Dans un second temps, l'entité 3 accroît sa demande. Supposons qu'on obtienne le vecteur de demande $Q'=(1,3,5,9)$. À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges $x(Q,C)=(2,5,4,7)$ et $x(Q',C)=(2,5,4,10)$ vérifie la propriété (PS) pour les vecteurs de demande Q et Q'. En effet, les contributions des entités* 1 *à* 3 *ne sont pas affectées par l'ampleur des demandes des entités dont les contributions sont plus élevées que les leurs.*

Principe séquentiel radial (PSR) Il s'agit d'une version plus faible de la propriété précédente. Elle dit que la contribution d'une entité ne devrait pas être affectée par une *augmentation proportionnelle* des demandes des entités dont les contributions sont plus élevées que la sienne. On la définit formellement comme suit. Soit une entité i et deux demandes Q et Q' telles que :

- $q'_j = q_j$ pour tout $j = i$ et pour tout j tel que $x_j(Q,C) < x_i(Q,C)$,
- $q'_j = \beta_j q_j$ avec $\beta_j \geq 1$ pour tout j tel que $x_i(Q,C) \leq x_j(Q,C)$.

On devrait alors avoir $x_i(Q,C) = x_i(Q',C)$.

Exemple : *soit un problème de partage de coûts à 4 entités portant sur des demandes bidimensionnelles. Supposons dans un premier temps que le vecteur de demande soit de la forme* $Q = ((1,2),(2,1),(1,3),(3,6))$. *Dans un second temps, l'entité 3 triple sa demande tandis que l'entité 4 double la sienne. On obtient le vecteur de demande* $Q' = ((1,2),(2,1),(3,9),(6,12))$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges* $x(Q,C) = (2,1,5,9)$ *et* $x(Q',C) = (2,1,8,10)$ *vérifie la propriété (PSR) pour les vecteurs de demande* Q *et* Q'. *En effet, les contributions des entités* 1 *et* 2 *ne sont pas affectées par l'ampleur des demandes des entités dont les contributions sont plus élevées que les leurs.*

3.4.3 Le traitement des entités négligeables

Les propriétés de cette sous-section constituent une suite naturelle au principe séquentiel. On pourrait avoir de sérieux doutes sur une règle qui imputerait une part de coûts positive à une entité qui aurait une demande nulle. Une des propriétés énoncées ci-dessous va plus loin, en exigeant que les parts des autres agents soient insensibles à l'élimination d'une entité dont la demande est nulle. Une propriété encore plus forte exige que les contributions des autres agents soient insensibles à l'élimination d'une entité dont l'ajout de la demande à n'importe quel sous-ensemble des autres entités, entraîne toujours un accroissement de coûts égal à son coût de faire cavalier seul, ce qui implique que cet agent paie son coût de faire cavalier seul. Une dernière propriété exige que les contributions des agents soient ordonnées de la même façon que leurs coûts de faire cavalier seul.

Dans les définitions qui suivent, Q_{-i} est le vecteur des demandes Q duquel on a éliminé la composante q_i alors que C_{-i} est la restriction de C au vecteur Q_{-i} et $x^{N\setminus\{i\}}$ celle de la règle x à (Q_{-i}, C_{-i}).

Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN) Si une entité a une demande nulle, les contributions des autres ne devraient pas dépendre de la présence ou non de cette entité dans le problème de partage. Formellement, si $q_i = 0$, alors :

$$x_j^{N\setminus\{i\}}\left(Q_{-i}, C_{-i}\right) = x_j\left(Q^{N\setminus\{i\}}, C\right) \quad \forall j \in N \setminus \{i\}$$

ce qui implique $x_i(Q^{N\setminus\{i\}}, C) = 0$.

***Exemple :** soit le problème de partage de coûts à 3 entités dont la fonction de coût est :*

$$C : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} : C(Q) = q_1 + q_2 + q_1^2\sqrt{q_2} + q_3$$

Supposons que $Q = (0,3,4)$ et donc que $C_{-i}(Q_{-i}) = C(Q^{N\setminus\{i\}}) = 12$. À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges $x_1(Q^{N\setminus\{1\}}, C) = 0$, $x_2^{N\setminus\{1\}}(Q_{-1}, C_{-1}) = x_2(Q^{N\setminus\{1\}}, C) = 5$ et $x_3^{N\setminus\{1\}}(Q_{-1}, C_{-1}) = x_3(Q^{N\setminus\{1\}}, C) = 7$ vérifie la propriété (IDN) pour le vecteur de demande Q. En effet, que l'entité 1, qui a une demande nulle, soit absente ou présente dans le problème de partage, elle n'a pas d'influence sur la part des coûts attribuée aux entités 2 et 3. Notons que la part des coûts attribuée à l'entité 1 est forcement nulle.

Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN) Une entité i est négligeable pour un problème (Q,C) si $C(Q^{S\cup\{i\}}) - C(Q^s) = c_i(q_i)$ pour tout sous-ensemble $S \subset N \setminus \{i\}$. Une entité est négligeable si elle est négligeable quel que soit le problème.

On dit qu'une règle de répartition est insensible à l'élimination d'une entité négligeable si les contributions exigées des autres entités restent les mêmes une fois éliminée l'entité négligeable du problème de répartition des coûts. Cette propriété implique que l'entité négligeable paie exactement son coût de faire cavalier seul. Elle va cependant plus loin en spécifiant que le retrait de cette entité du problème de partage ne doit pas changer les contributions des autres. Formellement, si l'entité i est négligeable, on doit avoir :

$$x_j^{N\setminus\{i\}}\left(Q_{-i}, C_{-i}\right) = x_j\left(Q, C\right) \quad \forall j \in N \setminus \{i\}$$

ce qui implique $x_i(Q,C) = c_i(q_i)$.

***Exemple :** soit le problème de partage de coûts à 3 entités dont la fonction de coût est :*

$$C : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} : C(Q) = q_1 + q_2 + q_1^2 \sqrt{q_2} + q_3$$

Seule l'entité 3 est négligeable dans cet exemple. En effet $C(Q^{S \cup \{3\}}) - C(Q^S) = q_3 = c_3(q_3)$ *pour tout sous ensemble* $S \subset N \setminus \{3\}$. *Supposons que* $Q = (1,4,8)$ *et donc que* $C(Q) = 14$ *et* $C_{-3}(Q_{-3}) = 6$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges* $x_1^{N \setminus \{3\}}(Q_{-3}, C_{-3}) = x_1(Q,C) = 2$, $x_2^{N \setminus \{3\}}(Q_{-3}, C_{-3}) = x_2(Q,C) = 4$ avec $x_3(Q,C) = 8$ *vérifie la propriété (IEN) pour le vecteur de demande Q. En effet, que l'entité 3, qui est négligeable, soit absente ou présente dans le problème de partage de coûts, elle n'a pas d'influence sur la part des coûts attribuée aux entités* 1 *et* 2. *Notons que la part des coûts attribuée à l'entité* 3 *est égale à son coût de faire cavalier seul.*

Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP) Le classement des contributions de deux entités ne doit pas dépendre de la demande des autres entités. Formellement, étant donné deux problèmes (Q,C) et (Q',C) et deux entités *i* et *j* tels que $q_i = q_i'$ et $q_j = q_j'$, on doit avoir :

$$x_i(Q,C) \le x_j(Q,C) \Leftrightarrow x_i(Q',C) \le x_j(Q',C)$$

Exemple : *supposons dans un premier temps que, lors d'un problème de partage de coûts à 3 entités, le vecteur de demande soit de la forme* $Q = (1,4,2)$. *Dans un second temps, l'entité* 2 *accroît sa demande tandis que les demandes des entités 1 et 3 restent inchangées. Supposons qu'on obtienne le vecteur de demande* $Q' = (1,10,2)$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges* $x(Q,C) = (3,7,4)$ *et* $x(Q',C) = (4,6,10)$ *vérifie la propriété (INP) pour les vecteurs de demande* Q *et* Q'. *En effet, le classement des charges imputées aux entités* 1 *et* 3 *n'est pas affecté par la modification de la demande de l'entité* 2. *On a* $x_1(Q,C) = 3 \le 4 = x_3(Q,C)$ *et* $x_1(Q',C) = 4 \le 6 = x_3(Q',C)$.

Remarque 2 La propriété (IEN) implique évidemment (IDN). Par contre, dans la mesure où le coût incrémental d'ajouter une entité dont la demande est nulle à d'autres est toujours nul, la propriété (IDN) est plus faible que (IEN). S'il s'agit de comparer les propriétés (IEN) et (INP), aucune n'est plus forte que l'autre.

3.4.4 La monotonie

On s'attend généralement à ce que les entités paient davantage lorsqu'elles augmentent leurs exigences ou quand les coûts augmentent. La monotonie par rapport aux coûts et la monotonie par rapport à la demande, définies ci-après, traduisent cette préoccupation. Dans certaines circonstances, on peut aussi s'intéresser à la façon dont la contribution d'une entité peut être affectée par le changement de la demande des autres entités. Dans certains cas, elles peuvent augmenter et dans d'autres diminuer. On parle de monotonie croisée positive quand elles augmentent toutes et négative quand elles diminuent toutes. Ces propriétés s'avèrent très fortes dans un contexte général et il faudra souvent se contenter de la monotonie le long d'un rayon.

Monotonie par rapport aux coûts (MCT) Cette propriété veut que, si les coûts devaient s'avérer plus élevés que prévu, quelle que soit l'ampleur du projet ou les niveaux de production à réaliser, alors les parts des coûts imputées aux différentes entités ne devraient pas diminuer. Formellement, étant donné deux problèmes (Q,C) et (Q,C') tels que $C(Q) \le C'(Q)$, on devrait avoir $x_i(Q,C) \le x_i(Q,C')$ pour chaque entité *i*. On peut la voir comme une propriété incitative. Les entités devraient être encouragées à réduire leurs coûts en les faisant bénéficier de ces réductions. Comme on le verra, cette propriété est très forte et est satisfaite par très peu de méthodes. Il existe des formes plus faibles de monotonie par rapport aux coûts sur lesquelles on reviendra en temps et lieu.

Exemple : *soit deux problèmes de partage de coûts à 3 entités dont les fonctions de coût sont:*

$$C : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} : C(Q) = q_1 + q_2 q_3$$
$$C' : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} : C'(Q) = q_1 + q_2 q_3^2$$

On a $C(Q) \le C'(Q)$. *Supposons que* $Q = (1,1,2)$ *et donc que* $C(Q) = 3$ *et* $C'(Q) = 5$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges* $x(Q,C) = (1,1,1)$ *et* $x(Q,C') = (1,2,2)$ *vérifie la propriété (MCT) pour le vecteur de demande* Q. *En effet, les* *charges de toutes les entités sont réduite (ou maintenue en ce qui concerne l'entité* 1*) du fait de la réduction de coût liée au passage de* C' *à* C.

Monotonie par rapport à la demande (MD) Cette propriété exige que la contribution demandée à une entité ne décroisse jamais par rapport aux quantités demandées par cette entité. Formellement, si on a deux problèmes (Q,C) et (Q',C) et une entité i tels que $q_i \leq q_i'$ alors que $q_j = q_j'$ pour toute autre entité *j*, on devrait observer $x_i(Q,C) \leq x_i(Q',C)$.

Exemple : *supposons dans un premier temps que, lors d'un problème de partage de coûts à 3 entités, le vecteur de demande soit de la forme* $Q = (1,3,4)$. *Dans un second temps, l'entité* 2 *accroît sa demande tandis que les demandes des entités 1 et 3 restent inchangées. Supposons qu'on obtienne le vecteur de demande* $Q' = (1,6,4)$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait à l'entité* 2 *les charges* $x_2(Q,C) = 4$ *et* $x_2(Q',C) = 6$ *vérifie la propriété (MD) pour les vecteurs de demande* Q *et* Q'. *En effet, la charge imputée à l'entité* 2 *n'a pas été réduite suite à l'augmentation de sa demande :* $x_2(Q,C) = 4 < 6 = x_2(Q',C)$.

Dans la mesure où une augmentation de la demande entraîne généralement une augmentation de coût, on peut s'attendre à ce que (MD) soit violée lorsque (MCT) l'est.

Monotonie par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MDR) Cette propriété, conçue pour les demandes multidimensionnelles, exige que la contribution exigée d'une entité ne décroisse jamais lorsque cette entité augmente les quantités qu'elle demande de façon proportionnelle. Formellement, si on a deux problèmes (Q,C) et (Q',C) et une entité i tels que $q_i' = \beta q_i$ avec $\beta > 1$ alors que $q_j = q_j'$ pour toute autre entité j, on devrait observer $x_i(Q,C) \leq x_i(Q',C)$.

Exemple : *soit un problème de partage de coûts à 4 entités portant sur des demandes bidimensionnelles. Supposons dans un premier temps que le vecteur de demande soit de la forme* $Q = ((1,2),(2,1),(1,3),(3,6))$. *Dans un second temps, l'entité 3 accroît sa demande tandis que les demandes des autres entités restent inchangées. Supposons que* $\beta = 3$, *on* *obtient le vecteur de demande* $Q' = ((1,2),(2,1),(3,9),(3,6))$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait à l'entité* 3 *les charges* $x_3(Q,C) = 4$ *et* $x_3(Q',C) = 6$ *vérifie la propriété (MDR) pour les vecteurs de demande* Q *et* Q'. *En effet, la charge imputée à l'entité* 3 *n'a pas été réduite suite à l'augmentation proportionnelle des quantités qu'elle demandait :* $x_3(Q,C) = 4 < 6 = x_3(Q',C)$.

Monotonie croisée positive par rapport à la demande (MCP) La monotonie croisée positive dans la demande exige que l'accroissement de la demande d'une entité n'entraîne pas de baisse des contributions exigées des autres entités. Formellement, si on a deux problèmes (Q,C) et (Q',C) et une entité i tels que $q_i \le q_i'$ alors que $q_j = q_j'$ pour toute autre entité j, on devrait observer $x_j(Q,C) \le x_j(Q',C)$ pour toutes les entités autres que i.

Exemple : *supposons dans un premier temps que, lors d'un problème de partage de coûts à 3 entités, le vecteur de demande soit de la forme* $Q = (1,3,4)$. *Dans un second temps, l'entité 2 accroît sa demande tandis que les demandes des entités 1 et 3 restent inchangées. Supposons qu'on obtienne le vecteur de demande* $Q' = (1,6,4)$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges* $x_1(Q,C) = 1$, $x_3(Q,C) = 4$ *et* $x_1(Q',C) = 1$, $x_3(Q',C) = 6$ *vérifie la propriété (MCP) pour les vecteurs de demande* Q *et* Q'. *En effet, les charges imputées aux entités* 1 *et* 3 *n'ont pas été réduites suite à l'augmentation de la demande de l'entité* 2 *:* $x_1(Q,C) = 1 = x_1(Q',C)$ *et* $x_3(Q,C) = 4 < 6 = x_3(Q',C)$.

Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN) Si on a deux problèmes (Q,C) et (Q',C) et une entité i tels que $q_i \le q_i'$ alors que $q_j = q_j'$ pour toute autre entité j, on devrait observer $x_j(Q,C) \ge x_j(Q',C)$ pour toutes les entités autres que i.

Exemple : *sur la base de l'exemple qui précède, une règle de répartition qui imputerait les charges* $x_1(Q,C) = 1$, $x_3(Q,C) = 4$ *et* $x_1(Q',C) = 1$, $x_3(Q',C) = 3$ *vérifie la propriété (MCN) pour les vecteurs de demande* Q *et* Q'. *En effet, les charges imputées aux entités* 1 *et* 3 *n'ont pas été augmentées suite à l'augmentation de la demande de l'entité* 2 *:* $x_1(Q,C)=1=x_1(Q',C)$ *et* $x_3(Q,C)=4>3=x_3(Q',C)$.

Monotonie croisée (positive MCPR ou négative MCNR) par rapport à des changements proportionnels dans la demande La contribution exigée d'une entité ne doit pas décroître ou croître lorsqu'une autre entité augmente les quantités qu'elle demande de façon proportionnelle.

Exemple : *soit un problème de partage de coûts à 3 entités portant sur des demandes bidimensionnelles. Supposons dans un premier temps que le vecteur de demande soit de la forme* $Q=((1,2),(3,4),(1,1))$. *Dans un second temps, l'entité* 2 *accroît les quantités qu'elle demande de façon proportionnelle tandis que les demandes des entités 1 et 3 restent inchangées. Supposons qu'on obtienne le vecteur de demande* $Q'=((1,1),(6,8),(1,1))$.

- *une règle de répartition qui imputerait les charges* $x_1(Q,C)=1$, $x_3(Q,C)=4$ *et* $x_1(Q',C)=1$, $x_3(Q',C)=6$ *vérifie la propriété (MCPR) pour les vecteurs de demande* Q *et* Q'. *En effet, les charges imputées aux entités* 1 *et* 3 *n'ont pas été réduites suite à l'augmentation de la demande de l'entité* 2 *:* $x_1(Q,C)=1=x_1(Q',C)$ *et* $x_3(Q,C)=4<6=x_3(Q',C)$ *;*
- *à l'inverse, une règle de répartition qui imputerait les charges* $x_1(Q,C)=1$, $x_3(Q,C)=4$ *et* $x_1(Q',C)=1$, $x_3(Q',C)=3$ *vérifie la propriété (MCPN) pour les vecteurs de demande* Q *et* Q'. *En effet, les charges imputées aux entités* 1 *et* 3 *n'ont pas été augmentées suite à l'augmentation de la demande de l'entité* 2 *::* $x_1(Q,C)=1=x_1(Q',C)$ *et* $x_3(Q,C)=4>3=x_3(Q',C)$.

3.4.5 Les bornes sur les contributions

Au delà des propriétés normatives qui précèdent, une entité sera souvent intéressée à connaître a priori les contributions minimale et maximale qu'on pourra exiger d'elle. Par exemple, si les entités sont libres de participer à un projet commun, chacune d'elle le fera si elle est assurée de ne pas payer plus que son coût de faire cavalier seul, une propriété qu'on appelle la participation. Les entités peuvent exiger davantage dans la mesure où des sous-groupes pourraient toujours choisir de former des alliances pour répondre à leurs besoins. Pour contrer ce type de déviation, on ne devrait pas exiger davantage des membres de toutes les coalitions possibles que le coût auquel ces coalitions pourraient fonctionner seules.

En cas de déséconomies d'échelle, au moins une entité devra payer davantage que son coût de faire cavalier seul. C'est dire que le cœur n'existe pas. On peut néanmoins forcer les entités à coopérer et à partager les coûts parce qu'un projet commun peut comporter des avantages, esthétiques par exemple, pour l'ensemble de la société. Autant on peut considérer comme équitable que les entités ne paient pas plus que leur coût de faire cavalier seul lorsque c'est possible, autant on devrait exiger que chaque entité paie au moins son coût de faire cavalier seul et que les membres de chaque coalition possible paient ensemble au moins le coût auquel elle pourrait fonctionner seule lorsque cela est possible, comme lorsqu'il y a déséconomies d'échelle. On dira d'une répartition qui rencontre cette propriété qu'elle satisfait le test de l'anti-cœur.

Participation (PA) La participation veut qu'aucune entité ne se voit imputer une part des coûts supérieure à son coût de faire cavalier seul, i.e. $x_i(Q,C) \le c_i(q_i)$ pour tout *i*.

Exemple : *soit le problème de partage de coûts à 3 entités dont la fonction de coût est :*

$$C:\mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}: C(Q) = 5 + q_1 q_2 + q_2 + q_3$$

À partir de cette fonction, on a $c_1(q_1) = 5,\ c_2(q_2) = 5 + q_2$ et $c_3(q_3) = 5 + q_3$. *Supposons que le vecteur de demande soit de la forme* $Q = (1,3,4)$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait des charges* $x_1(Q,C) \le 5,\ x_2(Q,C) \le 8$ et $x_3(Q,C) \le 9$ *vérifie la propriété (PA) pour le vecteur de demande Q. En effet, les charges imputées aux trois entités sont alors inférieures ou égales à leurs coûts de faire cavalier seul.*

Anti-participation (APA) C'est l'inverse de la propriété précédente. Chaque unité paie au moins son coût de faire cavalier seul, i.e. $x_i(Q,C) \ge c_i(q_i)$ pour tout *i*.

***Exemple :** sur la base de l'exemple qui précède, À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait des charges* $x_1(Q,C) \geq 5$, $x_2(Q,C) \geq 8$ et $x_3(Q,C) \geq 9$ *vérifie la propriété (APA) pour le vecteur de demande Q. En effet, les charges imputées aux trois entités sont alors supérieures ou égales à leurs coûts de faire cavalier seul.*

Test du cœur (CO) Une répartition passe le test du cœur lorsque l'imputation qu'elle donne pour n'importe quel sous-ensemble d'entités ne dépasse pas le coût total auquel cette coalition pourrait fonctionner seule dans le cas où il existe des imputations ayant cette propriété. Formellement, $\sum_{i \in S} x_i(Q,C) \leq C(Q^S)$ pour tout sous-ensemble *S* de *N*. On peut écrire cette inégalité sous la forme $\sum_{i \in S} x_i(Q,C) \geq C(Q) - C(Q^{N \setminus S})$. Sous cette forme, la propriété veut que chaque coalition se voit imputer un montant au moins aussi élevé que le coût supplémentaire qu'elle impose à la coalition complémentaire $N \setminus S$ lorsqu'elle la rejoint pour former la grande coalition *N*. Si ce n'était pas le cas, les membres de la coalition $N \setminus S$ verseraient un subside aux membres de la coalition *S*, d'où une objection possible de leur part. On peut donc voir (CO) comme une condition spécifiant l'absence d'interfinancement ou encore la robustesse à la sécession.

***Exemple :** soit le problème de partage de coûts à 3 entités dont la fonction de coût est :*

$$C : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R} : C(Q) = 5 + q_1 q_2 + q_2 + q_3$$

À partir de cette fonction et supposant que le vecteur de demande soit de la forme $Q = (1,2,1)$*, on a :*

$$c_1(q_1) = 5 \quad c_2(q_2) = 7 \quad c_3(q_3) = 6$$

$$C(Q^{\{12\}}) = 9 \quad C(Q^{\{13\}}) = 6 \quad C(Q^{\{23\}}) = 8 \quad C(Q^{\{123\}}) = 10$$

Dans ce cas, une règle de répartition qui imputerait des charges telles que :

$$x_1(Q,C) \leq 5 \quad x_2(Q,C) \leq 7 \quad x_3(Q,C) \leq 6$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_i(Q,C) \leq 9 \quad x_1(Q,C) + x_3(Q,C) \leq 6 \quad \sum_{i=2}^{3} x_i(Q,C) \leq 8 \quad \sum_{i=1}^{3} x_i(Q,C) \leq 10$$

vérifie la propriété (CO) pour le vecteur de demande Q.

Remarque 3 Le test du cœur implique évidemment la participation dans la mesure où on admet les singletons comme coalitions dans le test du cœur.

Test de l'anti-cœur (ACO) Une répartition passe le test de l'anti-cœur lorsque l'imputation qu'elle donne pour n'importe quel sous-ensemble d'entités n'est pas inférieure au coût total auquel cette coalition pourrait fonctionner seule dans le cas où il existe des imputations ayant cette propriété. Formellement, $\sum_{i \in S} x_i(Q,C) \geq C(Q^S)$ pour tout sous-ensemble S de N, lorsque possible.

Exemple : *sur la base de l'exemple qui précède, une règle de répartition qui imputerait des charges telles que :*

$$x_1(Q,C) \geq 5 \quad x_2(Q,C) \geq 7 \quad x_3(Q,C) \geq 6$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_i(Q,C) \geq 9 \quad x_1(Q,C) + x_3(Q,C) \geq 6 \quad \sum_{i=2}^{3} x_i(Q,C) \geq 8 \quad \sum_{i=1}^{3} x_i(Q,C) \geq 10$$

vérifie la propriété (ACO) pour le vecteur de demande Q.

Suit une proposition qui relie ces dernières propriétés à la monotonie croisée.

Proposition 1 *Toute règle qui satisfait à la monotonie croisée négative par rapport à des changements proportionnels dans la demande satisfait également au test du cœur. A l'inverse, toute règle qui satisfait à la monotonie croisée positive par rapport à des changements proportionnels dans la demande satisfait au test de l'anti-cœur.*

Le premier énoncé a été démontré par Moulin (1986) dans le contexte d'un seul bien privé homogène. Il a été généralisé par Téjédo et Truchon (2002) à l'anti-cœur et au contexte plus général. En fait, les versions plus faibles de monotonie croisée que sont (MCNR) et (MCPR) leur suffisent pour établir ces résultats.

Il ne serait pas raisonnable d'exiger les propriétés (PA) et encore moins (CO) dans toutes les circonstances. Tout au plus devrait-on exiger d'une règle qu'elle donne des répartitions qui satisfont (PA) ou (CO) lorsque de telles répartitions existent. Dans le cas de (CO), on dit alors que le cœur existe. On sait que c'est le cas en présence d'économies d'échelle. La satisfaction de (PA), quant à elle, est possible sous l'hypothèse $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$. Le même genre de remarque s'applique à (MCN). Une telle condition a du sens uniquement en présence d'économies d'échelle.

3.4.6 L'insensibilité aux unités de mesure

On a souvent le choix des unités dans lesquelles on va exprimer les caractéristiques des demandes et des projets dont on doit partager les coûts. Par exemple, on peut exprimer la longueur d'une piste d'atterrissage en mètres ou en pieds, la résistance d'un barrage en Kg par centimètre carré ou en livres par pouce carré, la température minimale à laquelle il devra résister en degrés Celsius ou Fahrenheit. On ne voudrait évidemment pas que la fraction des coûts échéant à chaque entité dépende du choix des unités. En particulier, on voudrait que les répartitions produites par une règle soient insensibles à des transformations linéaires (changements proportionnels) des unités de mesure. S'il s'agit de passer des degrés Celsius à Fahrenheit, on parle alors de transformation affine (changements proportionnels plus ajout ou retrait d'une constante). On peut même aller plus loin et décider de mesurer la demande d'une entité en termes de son coût de faire cavalier seul, comme avec la règle séquentielle radiale. Dans la mesure où ce coût n'est pas proportionnel à la demande, il s'agit là d'une transformation non linéaire des quantités en unités monétaire. L'ordinalité exige qu'une règle ne soit pas affectée par une telle transformation. Elle couvre également le cas des transformations affines.

Insensibilité aux unités de mesure (IU) Une règle de partage de coûts est insensible aux unités de mesure si une transformation linéaire des unités dans lesquelles les quantités et les coûts sont exprimés ne change pas la répartition des coûts. Pour énoncer formellement cette propriété, on définit deux problèmes (Q, C) et (Q', C') comme étant *équivalents* s'il existe un vecteur $\lambda = (\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{nm_n})$ strictement positif, de même dimension que Q, tel que $Q = \lambda \otimes Q' \equiv (\lambda_{11} q'_{11}, \ldots, \lambda_{nm_n} q'_{nm_n})$ et $C'(Q') = C(\lambda \otimes Q')$. On permet donc que les quantités d'un même bien demandées par deux entités différentes soient transformées par un scalaire différent. L'insensibilité aux unités de mesure exige que, pour deux problèmes (Q,C) et (Q',C') équivalents, on ait $x_i(Q,C)=x_i(Q',C')$ pour tout *i*.

Ordinalité (O) Une règle de partage de coûts satisfait l'ordinalité si une transformation croissante des unités dans lesquelles les quantités et les coûts sont exprimés ne change pas la répartition des coûts. Ici, on définit deux problèmes (Q,C) et (Q',C') comme étant *ordinalement équivalents* s'il existe une liste $f=(f_1,\ldots,f_n)$ de transformations bijectives, une pour chaque entité, telles que $Q=f(Q')=(f_1(q_1'),\ldots,f_n(q_n'))$ *et* $C'(Q')=C(f(Q'))$. L'ordinalité exige que, pour deux problèmes (Q,C) et (Q',C') ordinalement équivalents, on ait $x_i(Q,C)=x_i(Q',C')$ pour tout *i*.

Exemple : *supposons que deux entités ont des demandes qui portent sur la température d'un bien. Dans un premier temps les demandes de ces entités sont réalisées en degrés Celsius ($^\circ C$), le vecteur de demande est de la forme* $Q=(17,20)$. *Dans un second temps, supposons que les entités* 1 *et* 2 *changent les unités dans lesquelles elles effectuent leurs demandes. L'entité* 1 *utilise des kelvins (K) et l'entité* 2 *des degrés Fahrenheit ($^\circ F$). D'après les formules suivantes :* $K={}^\circ C+273.15$ *et* ${}^\circ F=1.8{}^\circ C+32$, *le vecteur de demande est alors de la forme :* $Q'=(290.15,68)$. *On a également les fonctions de coûts suivantes :*

$$C:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}:C(Q)=2q_1+q_2$$
$$C':\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}:C'(Q')=2(q_1'-273{,}15)+\frac{5}{9}(q_2'-32)$$

À partir de ces fonctions, on a $C(Q)=C'(Q')=54$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait les charges* $x(Q,C)=(20,34)=x'(Q',C')$ *vérifie la propriété (O) pour les vecteurs de demande* Q *et* Q'. *En effet, les charges imputées aux entités* 1 *et* 2 *n'ont pas été modifiées suite une transformation croissante des unités dans lesquelles les quantités et les coûts sont exprimés (les problèmes* (Q,C) *et* (Q',C') *sont ordinalement équivalents).*

Ordinalité radiale (OR) Pour l'ordinalité radiale, on impose que chaque fonction f_i qui peut être appliquée à la demande de l'entité *i* transforme tout rayon de l'espace de ses demandes en un rayon (possiblement le même). Deux problèmes (Q,C) et (Q',C') dont l'un est obtenu par une telle transformation sont dits *radialement équivalents*. L'ordinalité radiale exige que, pour deux problèmes (Q,C) et (Q',C') radialement équivalents, on ait $x_i(Q,C) = x_i(Q',C')$ pour tout *i*. C'est une propriété plus faible que l'ordinalité dans la mesure où on restreint le type de transformation qu'on peut faire subir à un problème.

Remarque 3 Toutes les règles qui sont définies uniquement en termes des coûts $c_i(q_i)$, $ca_i(Q)$ ou $cm_i(Q)$ satisfont à l'ordinalité (O), dans la mesure où ces coûts sont insensibles au choix des unités pour exprimer les demandes. Par contre, les règles qui font intervenir les quantités ou les dérivées des fonctions de coût violent cette propriété. Certaines de ces dernières satisfont cependant à l'insensibilité aux unités de mesure (IU).

3.4.7 Les propriétés de séparation

On regroupe ici des propriétés qui veulent que, si la fonction de coût peut être séparées selon les entités, il devrait en être de même pour la répartition des coûts; si les coûts peuvent être décomposés en plusieurs éléments, la règle de partage de coûts devrait donner les mêmes résultats, qu'on l'applique séparément aux divers éléments de coût, comme par exemple les coûts spécifiques et communs, ou globalement à l'ensemble des coûts; et la règle devrait exiger les mêmes contributions d'un sous-ensemble d'entités si on la lui applique, après avoir prélevé ce qui est dû par les autres entités.

Séparation entre entités (SE) La séparation entre entités exige que, si les coûts sont séparables entre les entités, les parts des coûts imputées aux entités devraient correspondre aux coûts qui leur sont imputables. De façon formelle, si $C(Q) = \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$, on doit avoir $x_i(Q,C) = c_i(q_i)$.

Exemple : *soit le problème de partage de coûts à 3 entités dont la fonction de coût est :*

$$C : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} : C(Q) = 3q_1 + 2q_2 + q_3$$

À partir de cette fonction, on a $c_1(q_1) = 3q_1$, $c_2(q_2) = 2q_2$ et $c_3(q_3) = q_3$ *par conséquent :* $C(Q) = \sum_{i=1}^{3} c_i(q_i)$ *. Supposons que le vecteur de demande soit de la forme* $Q = (1,3,4)$ *et donc que* $C(Q) = 13$*. À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait des charges* $x(Q,C) = (3,6,4)$ *vérifie la propriété (PA) pour le vecteur de demande Q. En effet, la charge imputée à chaque entité est alors égale à sont coût de faire cavalier seul.*

Proportionnalité (PR) Cette propriété veut que, si les coûts sont proportionnels à la demande, il devrait en être de même des contributions. Formellement, s'il existe un vecteur A de même dimension et configuration que Q tel que $C(Q) = A.Q \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{m_i} a_{ih} q_{ih}$, on doit avoir $x_i(Q,C) = a_i.q_i \equiv \sum_{h=1}^{m_i} a_{ih} q_{ih}$ pour tout i.

Exemple : *soit un problème de partage de coûts à 3 entités portant sur des demandes tridimensionnelles dont la fonction de coût est :*

$$C : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} : C(Q) = 3q_{11} + q_{12} + 3q_{21} + 2q_{22} + 2q_{23} + q_{32}$$

Cette fonction peut s'écrire :

$$C(Q) = A.Q \equiv \sum_{i=1}^{3} \sum_{h=1}^{m_i} a_{ih} q_{ih}$$

avec $A = ((3,1,0),(3,2,2),(0,1,0))$. *Supposons que le vecteur de demande soit de la forme* $Q = ((1,1,0),(1,1,1),(0,2,0))$ *et donc que* $C(Q) = 13$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait des charges* $x(Q,C) = (4,7,2)$ *vérifie la propriété (PR) pour le vecteur de demande Q. En effet, la charge imputée à chaque entité est proportionnelle à sa demande. Par exemple, pour l'entité* 1, $x_1(Q,C) = \sum_{h=1}^{3} a_{1h} q_{1h} = 3 \times 1 + 1 \times 1 = 4$.

On voit immédiatement que (SE) implique (PR) dans la mesure où $A.Q$ est une fonction séparable. Il est également à noter que cette définition est plus forte que celle de Moulin et Shenker (1994). En effet, ils posent $a_{ih} = \alpha \geq 0 \quad \forall i, h$.

Additivité (AD) L'additivité veut que, si on peut séparer les coûts d'un projet en deux composantes, disons C_1 et C_2, répartir les composantes séparément devrait mener au même résultat que la répartition des coûts totaux. De façon formelle :

$$x_i(Q, C_1 + C_2) = x_i(Q, C_1) + x_i(Q, C_2) \text{ pour tout } i$$

Si cette propriété est vraie pour deux composantes, elle l'est également pour un nombre quelconque de composantes.

Exemple : *soit un problème de partage de coûts à 2 entités dont la fonction de coût est :*

$$C : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} : C(Q) = 2q_1q_2 + q_1$$

Cette fonction peut s'écrire : $C(Q) = C_1 + C_2$ avec $C_1 = 2q_1q_2$ et $C_2 = q_1$. *Supposons que le vecteur de demande soit de la forme* $Q = (2,3)$ *et donc que* $C(Q) = 14$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait des charges* $x(Q,C) = (6,8)$ *vérifie la propriété (IDC) pour le vecteur de demande* Q *si elle impute également* $x_1(Q,C_1) = 4$, $x_1(Q,C_2) = 2$ *et* $x_2(Q,C_1) = 8$, $x_2(Q,C_2) = 0$. *En effet, la charge imputée à chaque entité est la même que l'on décompose ou non le projet en deux composantes. Par exemple, pour l'entité* 1, $x_1(Q,C) = x_1(Q,C_1) + x_1(Q,C_2) = 6$.

Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC) Il s'agit d'un cas particulier de l'additivité. Un problème de partage (Q,C) est décomposable en coûts spécifiques ou directs et coûts communs si on peut écrire :

$$C(Q) = \sum_{i=1}^{n} ca_i(Q) + cc(Q)$$

Une méthode de partage de coûts x est insensible à une telle décomposition si :

$$x_i(Q,C) = ca_i(Q) + x_i(Q,cc) \quad \forall i$$

Avec une méthode insensible à ce type de décomposition, peu importe qu'on décompose les coûts ou non et peu importe la décomposition, la répartition du coût total sera la même.

Exemple : *soit un problème de partage de coûts à 3 entités dont la fonction de coût est :*

$$C : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} : C(Q) = q_1 + q_2 + 3(q_1 + q_2 + q_3)$$

où les deux premiers termes peuvent être considérés comme des coûts attribuables respectivement à l'entité 1 *et* 2. *Supposons que le vecteur de demande soit de la* *forme* $Q=(1,1,2)$ *et donc que* $C(Q)=14$, $ca_1(Q)=1$, $ca_2(Q)=1$ *et* $cc(Q)=12$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait des charges* $x(Q,C)=(3,3,8)$ *et* $x(Q,cc)=(2,2,8)$ *vérifie la propriété (IDC) pour le vecteur de demande Q. En effet, la charge imputée à chaque entité est égale à la somme de son coût attribuable et d'un part des coûts communs. Par exemple, pour l'entité* 1, $x_1(Q,C)=ca_1(q_1)+x_1(Q,cc)=1+2=2$ *et pour l'entité* 2 $x_2(Q,C)=ca_2(q_2)+x_2(Q,cc)=1+2=3$. *Supposons maintenant que l'entité* 2 *n'accepte pas le fait que le coût* q_2 *lui soit attribué. Une règle de répartition des coûts qui vérifie la propriété (IDC) imputera alors exactement les mêmes charges à chaque entité que si le coût* q_2 *avait été attribué. On aura donc toujours :* $x(Q,C)=(3,3,8)$.

Cohérence (CH) Bien que les autres propriétés citées ci-avant soient aussi des propriétés de cohérence, la présente, qui prend plusieurs formes dans la littérature, dit essentiellement que, si une ou plusieurs entités devaient se retirer du problème de partage des coûts, après avoir payé leur contribution selon la règle de partage en vigueur, et que les membres restants devaient satisfaire à toute la demande, la contribution de ces derniers aux coûts résiduels, selon la même règle, ne devrait pas être différente de ce qu'elle aurait été dans le problème de partage original. De façon formelle, étant donné une règle de partage x et un sous-ensemble d'entités $S \subset N$, définissons la fonction de coût résiduel $C^{N\setminus S}$ des autres entités par : [14]

$$C^{N\setminus S}(Q_{N\setminus S}) = \max\left\{C(Q)-\sum_{j\in S} x_j(Q,C),0\right\}$$

La cohérence exige que :

$$x_i^{N\setminus S}\left(Q_{N\setminus S},C^{N\setminus S}\right)=x_i(Q,C) \quad \forall i\in N\setminus S$$

Exemple : *soit un problème de partage de coûts à 4 entités dont la fonction de coût est :*

$$C:\mathbb{R}_+^4\rightarrow\mathbb{R}:C(Q)=3q_1+q_1q_2+q_2+q_3+q_4$$

[14] Cette définition est due à Hart et Mas-Colell (1989).

Supposons que le vecteur de demande soit de la forme $Q=(1,1,2,1)$ *et que* $C(Q)=8$. *Dans un premier temps, une répartition des coûts impute les charges* $x(Q,C)=(1,2,3,2)$. *Dans un second temps, les entités* 3 *et* 4*, qui ont payé leurs charges, se retirent du problème de partage de coût. Les coûts résiduels sont donc* $C^{\{1,2\}\setminus\{3,4\}}(Q_{\{1,2\}\setminus\{3,4\}})=3$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait des charges* $x_1^{\{1,2\}\setminus\{3,4\}}(Q_{\{1,2\}\setminus\{3,4\}},C^{\{1,2\}\setminus\{3,4\}})=1$ *et* $x_2^{\{1,2\}\setminus\{3,4\}}(Q_{\{1,2\}\setminus\{3,4\}},C^{\{1,2\}\setminus\{3,4\}})=2$ *vérifie la propriété (CH) pour le vecteur de demande* Q*. En effet, la charge imputée à chaque entité restant dans le problème de partage de coût (i.e.* 1 *et* 2*) n'est pas affectée par le départ des autres entités. Par exemple, pour l'entité* 1 *:* $x_1(Q,C)=x_1^{\{1,2\}\setminus\{3,4\}}(Q_{\{1,2\}\setminus\{3,4\}},C^{\{1,2\}\setminus\{3,4\}})=1$.

Cohérence faible (CHF) Étant donné un problème (Q,C) et un sous-ensemble d'entités $S\subset N$ *ayant les plus petites demandes*, i.e. tel que $c_i(q_i)\leq c_j(q_j)$ pour tout $i\in S$ et tout $j\in N\setminus S$, on doit avoir $x_i^{N\setminus S}(Q_{N\setminus S},C^{N\setminus S})=x_i(Q,C)$ pour tout i dans $N\setminus S$. En mots, si un certain nombre d'entités ayant les plus petites demandes, en termes des coûts de faire cavalier seul, devaient quitter le problème après avoir payé leur dû selon la règle de partage en vigueur et qu'on appliquait la même règle pour répartir entre les autres le coût résiduel de la demande totale, leurs contributions seraient les mêmes que dans le problème original.

Exemple : *soit un problème de partage de coûts à 4 entités dont la fonction de coût est :*

$$C:\mathbb{R}_+^4\to\mathbb{R}:C(Q)=3q_1+q_1q_2+q_2+q_3+q_4$$

À partir de cette fonction, on a $c_1(q_1)=3q_1$, $c_2(q_2)=q_2$, $c_3(q_3)=q_3$ et $c_4(q_4)=q_4$. *Supposons que le vecteur de demande soit de la forme* $Q=(1,1,2,1)$ *et donc que* $C(Q)=8$. *Dans un premier temps, une répartition des coûts impute les charges* $x(Q,C)=(1,2,3,2)$. *Dans un second temps, les entités* 2 *et* 4*, qui ont payé leurs charges et disposent des coûts de faire cavalier seul les plus faibles (*$c_2(q_2)=c_4(q_4)=1$*), se retirent du problème de partage de coût. Les coûts résiduels sont donc* $C^{\{1,3\}\setminus\{3,4\}}(Q_{\{1,3\}\setminus\{2,4\}})=4$. *À titre d'illustration une règle de répartition qui imputerait des charges* $x_1^{\{1,3\}\setminus\{2,4\}}(Q_{\{1,3\}\setminus\{2,4\}},C^{\{1,3\}\setminus\{2,4\}})=1$ *et* $x_2^{\{1,3\}\setminus\{2,4\}}(Q_{\{1,3\}\setminus\{2,4\}},C^{\{1,3\}\setminus\{2,4\}})=3$ *vérifie la propriété*

(CHF) pour le vecteur de demande Q*. En effet, la charge imputée à chaque entité restant dans le problème de partage de coût n'est pas affectée par le départ des entités ayant les demandes les plus faibles en termes des coûts de faire cavalier seul. Par exemple, pour l'entité* 1 *:* $x_1(Q,C) = x_1^{\{1,3\}\backslash\{2,4\}}(Q_{\{1,3\}\backslash\{2,4\}}, C^{\{1,3\}\backslash\{2,4\}}) = 1$.

La proposition qui suit établit la relation entre quelques propriétés d'insensibilité aux décompositions.

Proposition 2 1. (AD) implique (IDC) ; 2. (IDC) et (IDN) impliquent (IEN) ; 3. (IEN) implique (SE) ; 4. (PA) de même que (APA) impliquent (SE).

Chacune des propriétés présentées peut être associée à des considérations (ou principes) d'équité, d'efficacité ou encore de cohérence. Ces associations ne sont cependant pas toujours évidentes comme nous le verrons dans la section qui suit.

3.5 La corrélation propriétés / principes

Principes et propriétés sont des concepts étroitement liés. Il est en effet possible d'associer à chacune des sept catégories de propriétés un et parfois plusieurs principes. Ces associations sont schématisées dans la Figure 2.

Au centre de cette figure se trouvent les trois propriétés. Elles sont représentées par des cercles se chevauchant afin de signaler le fait que ces concepts ne sont pas étanches. Autour de ces concepts gravitent les sept ensembles de propriétés. Trois relations nous semblent mériter des éclaircissements. Il s'agit de celles relatives à l'efficacité. Le traitement des agents négligeables est associé à l'efficacité puisqu'il favorise l'unanimité. Les bornes sur les contributions garantissent pour leurs parts la participation c'est-à-dire un concept que nous avons associé à l'efficacité. Enfin, la propriété de monotonie peut quant à elle être associée à la fois à l'efficacité car elle induit une relation directe et incitative entre contribution et demande et à l'équité puisqu'il apparaît équitable que l'entité qui demande plus paie plus.

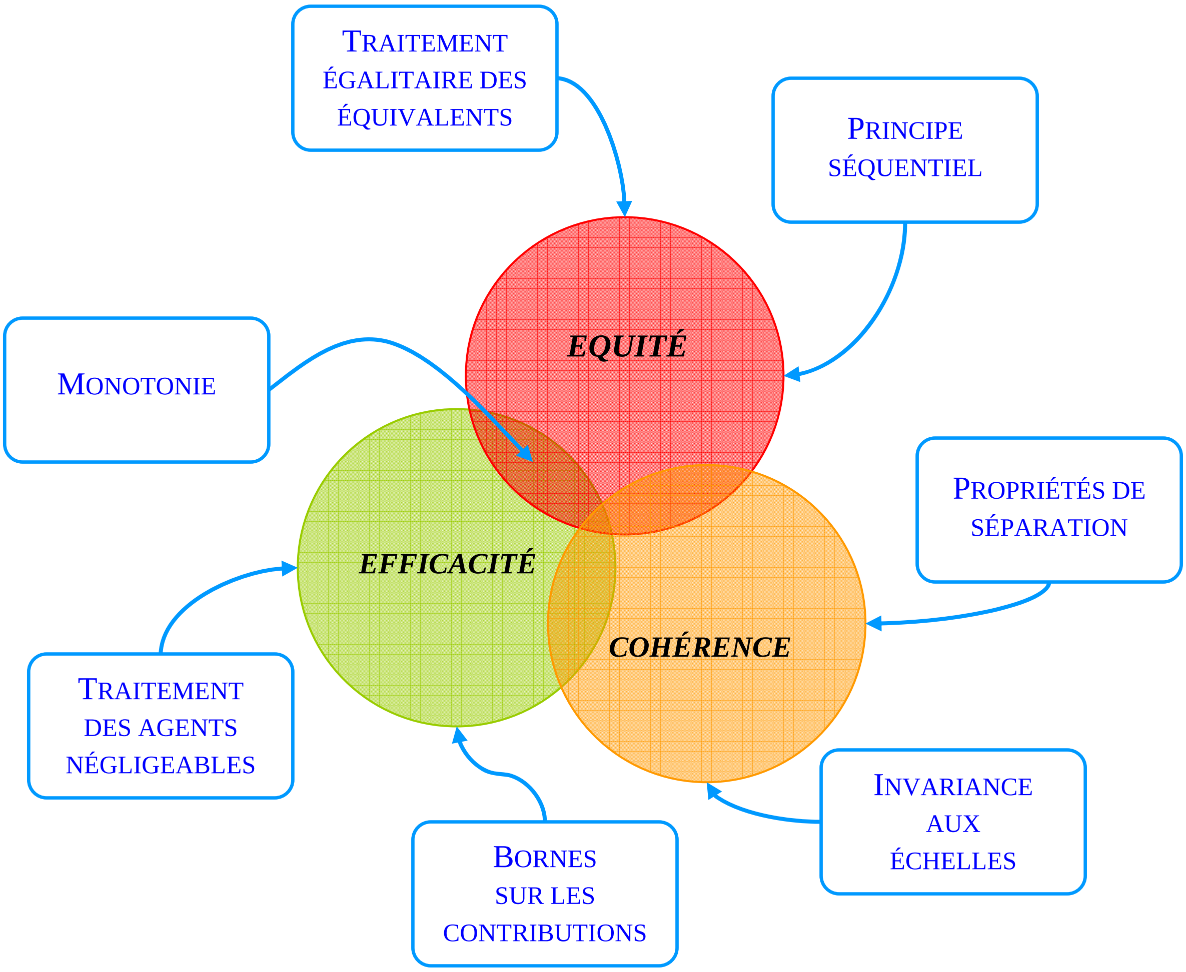


Figure 2 – Relations entre propriétés et principes

Toute la complexité du choix en terme de principe naît de l'absence de définitions rigoureuses et unanimement acceptées de ces concepts. Nous insistons donc sur le fait que le choix de la méthode doit se faire sur la base de ses propriétés. L'utilisation des principes associés à ces propriétés peut aider ensuite à construire l'argumentaire entourant la communication et la défense du choix effectué.

3.6 Les propriétés des méthodes de partage de coûts

Dans la mesure où une entité qui a une demande nulle n'a aucun impact sur les coûts quels qu'ils soient, toutes les règles recensées ici, sauf la répartition égalitaire, satisfont l'insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN). Il s'agit donc d'une propriété très faible.

Dans la suite, certaines propriétés sont satisfaites par certaines règles lorsqu'il y a économies d'échelle. En bref, on dit qu'il y a économies d'échelle si les coûts incrémentaux sont décroissants par rapport à l'ampleur des demandes. Il est à noter que si une règle satisfait à une des propriétés (MCN), (PA) et (CO) quand on a économies d'échelle, elle satisfait à la propriété inverse, i.e. (MCP), (APA) ou (ACO) quand on a déséconomies d'échelle. On notera dans les énumérations qui suivent économies d'échelle et déséconomies d'échelle respectivement par EE et DE.

3.6.1 Les propriétés des règles de répartition proportionnelle

On a le résultat général suivant pour les règles de répartition proportionnelle.

Proposition 1 *Toutes les règles qui ont la forme qui suit satisfont à la cohérence (CH) :*

$$x_i = xb_i + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^{n} t_j}\left(c(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j\right)$$

3.6.1.1 La règle des coûts moyens

La règle des coûts moyens, qui n'est définie que dans un contexte où les demandes sont unidimensionnelles, satisfait aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)

  $\Rightarrow$ Traitement égalitaire des équivalents (TE)

  (TE) $\Rightarrow$ Symétrie (S)

  (S) $\Rightarrow$ Traitement égalitaire des égaux (TEE)

- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)

  $\Rightarrow$ Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)

  $\Rightarrow$ Séparation entre entités (SE)

  (SE) $\Rightarrow$ Proportionnalité (PR)

- Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)

- Monotonie par rapport aux coûts (MCT)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), si EE ⇔ (MCP), si DE
- Participation (PA), si EE ⇔ Anti-participation (APA), si DE
- Test du coeur (CO), si EE ⇔ Test de l'anti-coeur (ACO), si DE
- Additivité (AD)

  ⇒ Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)
- Cohérence (CH)

Dans les contextes où cette règle peut s'appliquer, (TEE), (S) et (TE) sont équivalentes. Cette règle est la seule à satisfaire à deux sous-ensembles des conditions qui précèdent. Ils sont précisés dans les propositions qui suivent.

Proposition 2 (Moulin et Shenker, 1994) *La règle des coûts moyens est la seule qui satisfait à (PR) et à (MCT).*

En fait, cette règle satisfait à la condition plus forte qu'est (SE). Comme plusieurs autres règles satisfont à (PR), cette proposition implique que ces autres règles ne peuvent satisfaire à la monotonie telle que définie par Moulin et Shenker et encore moins à (MCT). Il y a aussi de fortes chances qu'elles violent également la monotonie par rapport à la demande (MD), dans la mesure où l'augmentation de la demande se traduit souvent en des augmentations de coûts.

Proposition 3 (Moulin et Shenker, 1994) *La règle des coûts moyens est la seule qui satisfait à (A), (CH), (PR) et (TEE).*

3.6.1.2 La règle égalitaire

La règle qui consiste à répartir les coûts de façon égalitaire entre les entités satisfait aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)

  ⇒ Traitement égalitaire des équivalents (TE)

  (TE) ⇒ Symétrie (S)

(S) ⇒ Traitement égalitaire des égaux (TEE)

- Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)
- Monotonie par rapport aux coûts (MCT)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée positive par rapport à la demande (MCN)
- Ordinalité (O)
- Additivité (AD)

  ⇒ Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)
- Cohérence (CH)

Il faut cependant noter que la plupart de ces propriétés sont satisfaites de façon triviale. Elles le sont parce que les contributions exigées de toutes les entités sont toujours égales entre elles. La monotonie croisée négative n'est pas satisfaite parce que l'accroissement de la demande de la part d'une entité entraîne toujours une augmentation de la part des coûts imputées aux autres entités, même quand il y a économies d'échelle.

3.6.1.3 La méthode des bénéfices résiduels

Cette règle satisfait aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)

  ⇒ Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)

  ⇒ Séparation entre entités (SE)

  (SE) ⇒ Proportionnalité (PR)
- Participation (PA) sous les hypothèses $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$
- Anti-participation (APA) sous les hypothèses $C(Q) \geq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \geq c_i(q_i)\ \forall i$
- Ordinalité (O)
- Cohérence (CH)

Étant donné $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$, l'hypothèse $cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$ est assez naturelle. S'il en coûte moins cher à se regrouper qu'à fonctionner de façon isolée, le coût incrémental de se joindre aux autres ne devrait pas être plus élevé que le coût de faire cavalier seul. C'est une hypothèse plus faible que la concavité.

Concernant le test du coeur, on a le résultat suivant qui est essentiellement dû à Young (1994).

Proposition 4 *Sous les hypothèses* $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$, *l'hypothèse* $cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$, *la règle des bénéfices résiduels donne des répartitions qui satisfont :*

$$\left.\begin{array}{l} x_i \leq c_i(q_i) \\ \sum_{j \in N\backslash\{i\}} x_j \leq C\left(Q^{N\backslash\{i\}}\right) \end{array}\right\} \forall i \qquad (10)$$

lorsque de telles répartitions existent. En particulier, si $n \leq 3$, *elle donne des répartitions qui satisfont à (CO) lorsque possible.*

On a évidemment la conclusion inverse avec les hypothèses inverses. L'ensemble des répartitions qui satisfont à *(10)* forme ce qu'on appelle le *semi-coeur*. Ce dernier se confond au coeur pour $n \leq 3$. Le test du coeur n'est cependant pas nécessairement satisfait lorsque $n > 3$. Young (1994) donne un exemple avec cinq entités où (CO) est violée, alors que le coeur existe.

3.6.1.4 Les méthodes comptables

Les trois méthodes présentées sous le titre de méthodes comptables dans le paragraphe 3.2.1.3 satisfont aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Participation (PA) sous les hypothèses $ca_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$ et $C(Q) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$
- Anti-participation (APA) sous les hypothèses $ca_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$ et $C(Q) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$

- Séparation entre entités (SE), lorsque $C(Q)=\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ implique $c_i(q_i)=ca_i(Q)\ \forall i$ et $cc(Q)=0$

  $\Rightarrow$ Proportionnalité (PR) lorsque $C(Q)=\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ implique $c_i(q_i)=ca_i(Q)\ \forall i$ et $cc(Q)=0$
- Ordinalité (O), dans la mesure où les $ca_i(Q)$ sont insensibles au changement d'unités
- Cohérence (CH)

Pour les méthodes de Louderback et de Balachandran et Ramakrishnan, on a aussi :

- Insensibilité des contributions des contributions aux entités négligeables (IEN) lorsque $C(Q)=c_i(q_i)+C(Q^{N\setminus\{i\}})$ implique $c_i(q_i)=ca_i(Q)$
- Insensibilité des contributions à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC) quand $C(Q)=\sum_{i=1}^{n} ca_i(Q)+cc(Q)$ implique $cc(Q^{\{i\}})=c_i(q_i)-ca_i(Q)\ \forall i$

L'hypothèse $C(Q)=\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ implique $c_i(q_i)=ca_i(Q)\ \forall i$ et $cc(Q)=0,$ sous laquelle (SE) est satisfaite, est naturelle. En effet, si le coût total est la somme des coûts de faire cavalier seul, cela signifie que le bénéfice à la coopération est nul. Dans ce cas, les coûts de faire cavalier seul deviennent naturellement les coûts attribuables aux entités.

3.6.1.5 La répartition proportionnelle aux coûts marginaux

Cette méthode satisfait aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Monotonie par rapport à la demande (MD), s'il y a économies d'échelle
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), si EE $\Leftrightarrow$ (MCP), si DE
- Participation (PA), si EE $\Leftrightarrow$ Anti-participation (APA), si DE
- Test du coeur (CO), si EE $\Leftrightarrow$ Test de l'anti-coeur (ACO), si DE
- Insensibilité aux unités de mesure (IU)
- Proportionnalité (PR)
- Cohérence (CH)

La répartition proportionnelle aux coûts marginaux est une extension de la règle des coûts moyens. Elle devient cette dernière dans le contexte d'un seul bien privé homogène. Elle satisfait également à une condition qui n'a pas été définie plus haut et qu'on appelle l'*indépendance locale* (IL). Cette condition veut que deux demandes qui ont le même coût marginal se voient imputer les mêmes parts du coût total. On a d'ailleurs le résultat suivant dû à Wang (2002).

Proposition 5 *La répartition proportionnelle aux coûts marginaux est la seule extension de la règle des coûts moyens qui satisfait à (IL) et à (IU).*

3.6.2 Les propriétés des règles inspirées de la théorie des jeux

3.6.2.1 La tarification à la Aumann-Shapley

Cette méthode de répartition satisfait aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)

  ⇒ Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)

  ⇒ Séparation entre entités (SE)

  (SE) ⇒ Proportionnalité (PR)
- Monotonie par rapport à la demande (MD), s'il y a économies d'échelle
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), si EE ⇔ (MCP), si DE
- Participation (PA), si EE ⇔ Anti-participation (APA), si DE
- Test du coeur (CO), si EE ⇔ Test de l'anti-coeur (ACO), si DE
- Insensibilité aux unités de mesure (IU)
- Additivité (AD)

  ⇒ Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)

En présence d'économies d'échelle, comme cette méthode satisfait à (MCN), elle satisfait forcément à (MD). Autrement, rien ne garantit que (MD) est respectée.

On a vu, dans le paragraphe 3.2.2.2, que la règle Aumann-Shapley est une généralisation de la règle des coûts moyens pour les demandes unidimensionnelles et homogènes. En fait, on doit à Friedmann et Moulin (1998) la caractérisation qui suit de cette règle.

Proposition 6 (Friedmann et Moulin, 1998) *La règle Aumann-Shapley est la seule qui satisfait à (IU) et qui soit une généralisation de la règle des coûts moyens pour les demandes unidimensionnelles et homogènes.*

Comme la règle satisfait à (SE), elle satisfait forcément à (PR) et, en vertu de la Proposition 3, elle ne peut satisfaire à la condition plus forte (MCT).[15]

3.6.2.2 La méthode Shapley-Shubik

Cette méthode de répartition satisfait aux propriétés suivantes :

- Symétrie (S)
- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)

  ⇒ Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)

  ⇒ Séparation entre entités (SE)

  (SE) ⇒ Proportionnalité (PR)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), si EE ⇔ (MCP), si DE
- Participation (PA), si EE ⇔ Anti-participation (APA), si DE
- Test du coeur (CO), si EE ⇔ Test de l'anti-coeur (ACO), si DE
- Ordinalité (O)
- Additivité (AD)

  ⇒ Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)

[15] Young (1985) montre cependant que cette règle satisfait à une forme de monotonie par rapport aux coûts plus faible que (MCT).

On trouve un certain nombre de caractérisations de cette règle dans la littérature dont les deux suivantes, qui se ressemblent d'ailleurs.

Proposition 7 (Sprumont, 1998) *La règle Shapley-Shubik est la seule qui satisfait à (AD), (IEN), (S) et (O).*

Proposition 8 (Friedmann et Moulin, 1998) *La règle Shapley-Shubik est la seule qui satisfait à (AD), (IEN), (S), (IU) et (MD).*

Notez que ces auteurs utilisent en fait une version plus faible de (IEN) mais cette règle satisfait la version qui a été définie ici. Encore ici, (MCT) n'est pas satisfaite.[16]

3.6.2.3 Le nucléole

Cette méthode de répartition satisfait aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)
  $\Rightarrow$ Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
    $\Rightarrow$ Séparation entre entités (SE)
      (SE) $\Rightarrow$ Proportionnalité (PR)
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Ordinalité (O)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)

3.6.3 Les propriétés de la répartition séquentielle

On traite séparément la règle séquentielle originale et la règle radiale puisqu'il s'agit de deux règles avec des propriétés différentes. On rappelle que la règle séquentielle originale s'applique uniquement au cas des demandes unidimensionnelles et homogènes.

[16] Young (1985) montre cependant que cette règle satisfait à une forme de monotonie par rapport aux coûts plus faible que (MCT). Il montre également que la règle Shapley-Shubik est la seule à satisfaire à cette condition, tout en traitant les entités de façon anonyme.

3.6.3.1 La règle séquentielle originale

Cette règle satisfait aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)
- Traitement égalitaire des équivalents (TE)
  - (TE) $\Rightarrow$ Symétrie (S)
    - (S) $\Rightarrow$ Traitement égalitaire des égaux (TEE)
- Principe séquentiel (PS)
- Additivité (AD)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)
- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Séparation entre entités (SE)
  - (SE) $\Rightarrow$ Proportionnalité (PR)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), si EE $\Leftrightarrow$ (MCP), si DE
- Participation (PA), si EE $\Leftrightarrow$ Anti-participation (APA), si DE
- Test du coeur (CO), si EE $\Leftrightarrow$ Test de l'anti-coeur (ACO), si DE
- Ordinalité (O)
- Cohérence faible (CHF)

Par définition, la règle séquentielle est la seule à satisfaire à (TEE) et à (PS). Moulin et Shenker (1992) ajoutent une autre propriété à la liste qui précède, qu'ils appellent la *Gratuité pour les demandes identique de coût nul* (GR). Cette propriété dit que, s'il est possible de fournir une même quantité identique q_i à toutes les entités à un coût nul, l'entité i ne devrait pas avoir à payer quoi que ce soit et les parts des autres ne devraient pas être affectées par la demande de l'entité i.

$$C\left(\overbrace{q_i,\ldots,q_i}^{n\text{ fois}}\right)=0 \Rightarrow x_j^{N\setminus\{i\}}(Q_{-i},C_{-i})=x_j(Q,C)\ \forall i\in N\setminus\{i\}$$

C'est une propriété qui a du sens dans les contextes où la fonction de coût est symétrique. C'est une autre des caractéristiques de la règle séquentielle obtenue par Moulin et Shenker (1992).

Proposition 9 (Moulin et Shenker) *La règle de répartition séquentielle est la seule qui satisfait à (AD), (RG), (PR) et (GR).*

Dans le cas de déséconomies d'échelle, les entités vont devoir payer au moins leur coût de faire cavalier seul sous la règle séquentielle. Elles peuvent alors se demander s'il y a un majorant à leur contribution. Moulin et Shenker (1992) ont établi le résultat suivant :

$$x_i \leq \frac{c(nq_i)}{n} \quad \forall i \in N$$

Autrement dit, une entité est assurée de ne jamais payer plus que la contribution moyenne qui serait exigée d'elle si toutes les autres entités avaient la même demande qu'elle. C'est assez équitable comme majorant.

3.6.3.2 La règle séquentielle radiale

La règle séquentielle radiale satisfait aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)

  ⇒ Traitement égalitaire des équivalents (TE)

  (TE) ⇒ Symétrie (S)

  (S) ⇒ Traitement égalitaire des égaux (TEE)
- Principe séquentiel radial (PSR)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)
- Monotonie par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MDR)
- Monotonie croisée négative par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MCNR)
- Participation (PA), si EE ⇔ Anti-participation (APA), si DE
- Test du coeur (CO), si EE ⇔ Test de l'anti-coeur (ACO), si DE
- Séparation entre entités (SE)

$\Rightarrow$ Proportionnalité (PR)

- Ordinalité (OR)
- Cohérence faible (CHF)

On peut également garantir un majorant aux contributions des entités dans le contexte multidimensionnel. Étant donné une entité *i*, construisons un vecteur de demande $\tilde{Q}^i$ en changeant proportionnellement les demandes des autres entités de façon à ce que $c_j(\tilde{q}_i^j) = c_i(q_i)\ \forall j$. Les demandes des entités pour lesquelles $c_j(q_j) < c_i(q_i)$ se trouvent ainsi à être augmentées et celles pour lesquelles $c_j(q_j) > c_i(q_i)$ à être diminuées. Téjédo et Truchon (2001) montrent que la règle de répartition séquentielle radiale donne une répartition qui respecte :

$$x_i \leq \frac{C(\tilde{Q}^i)}{n} \quad \forall i \in N$$

Koster, Tijs et Borm (1998) ont démontré la proposition suivante dans le cas des demandes homogènes. Elle demeure vraie dans le contexte plus général retenu ici, comme le montrent Téjédo et Truchon (2000).

Proposition 10 **(Koster, Tijs et Borm, 1998)** *La règle de répartition séquentielle radiale est la seule qui satisfait à (TE) et à (PSR).*

Dans le cas où chaque entité demande un seul bien qui lui est spécifique, la règle radiale devient la règle axiale et on a alors cette autre caractérisation.

Proposition 11 **(Sprumont, 1998)** *La règle séquentielle axiale est la seule à satisfaire à (O), (PS), (IDN), (INP) et (S).*

Téjédo et Truchon (2002) montrent qu'il n'existe pas de caractérisation semblable dans le contexte plus général considéré ici. On aura noté qu'on a gagné l'ordinalité avec la règle radiale et donc avec la règle axiale, alors que la règle originale ne satisfait même pas à (IU). Ce gain est attribuable à l'utilisation des coûts de faire cavalier seul plutôt que les quantités pour classer les demandes et construire les demandes intermédiaires. Par contre, on a perdu l'additivité. En fait, la proposition suivante établit qu'il n'est pas possible de généraliser la répartition séquentielle au contexte multidimensionnel tout en exigeant (IU) et (AD).

Proposition 12 **(Kolpin, 1996)** *Il n'existe pas de généralisation de la règle de répartition séquentielle qui satisfait à (IU) et à (AD).*

3.6.4 Tableaux synoptiques

Dans le Tableau 1, nous indiquons les propriétés vérifiées par les méthodes présentées au sein de ce rapport. Un « O » indique que la méthode de la rangée correspondante satisfait à la propriété en question, un « R » qu'elle satisfait à la forme radiale de la propriété, un « Q » qu'elle satisfait à la propriété en présence d'économies d'échelle, et un « N » que la propriété n'est pas satisfaite, i.e. qu'il existe des contextes ou problèmes dans lesquels elle est violée. Dans certains cas, nous indiquons le nom d'une propriété plus faible ou apparentée qui est vérifiée en lieu de la condition proprement dite. LB signifie que la propriété est satisfaite par les méthodes de Louderback et de Balachandran et Ramakrishnan.

La propriété (IDN) n'apparaît pas dans ce tableau parce qu'elle est satisfaite par toutes les méthodes, sauf la répartition égalitaire. D'autres propriétés n'y apparaissent pas non plus parce qu'elles sont apparentées à d'autres qui s'y trouvent.

Rappelons les abréviations des propriétés :

- RG : préservation des rangs
- TEE : traitement égalitaire des égaux
- S : symétrie
- TE : traitement égalitaire des équivalents
- PS : principe séquentiel
- PSR : principe séquentiel radial
- IDN : insensibilité des contributions aux demandes nulles
- IEN : insensibilité des contributions aux entités négligeables
- GR : gratuité pour des demandes identiques de coût nul

- INP : insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes
- MCT : monotonie par rapport aux coûts
- MD : monotonie par rapport à la demande
- MCN : monotonie croisée négative par rapport à la demande
- MCP : monotonie croisée positive par rapport à la demande
- PA : participation
- APA : anti-participation
- CO : test du coeur ou absence d'inter-financement
- ACO : test de l'anti-cœur
- IU : invariance par rapport aux unités de mesure
- O : ordinalité
- OR : ordinalité radiale
- SE : séparation entre entités
- PR : proportionnalité
- AD : additivité
- IDC : Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs
- CH : cohérence
- CHF : cohérence faible

Le tableau est séparé horizontalement en deux parties. La partie supérieure concerne deux règles qui ne peuvent être utilisées qu'avec des demandes portant sur un bien privé homogène alors que les règles de la partie inférieure peuvent être appliquées à un contexte très général. On distingue également des séparations verticales. Elles permettent de séparer les groupes de propriétés en fonction des principes qu’ils incarnent.

Principes et proriétés / Méthodes de partage de coûts	ÉQUITÉ			EQUITÉ & EFFICACITÉ			EFFICACITÉ				COHÉRENCE			
	RG	TE	PS	MCT	MD	MCN	IEN	INP	PA	CO	SE	O	AD	CH
coûts moyens	O	O	N	O	O	Q	O	O	Q	Q	O	N	O	O
séquentielle originale	O	O	O	N	O	Q	O	O	Q	Q	O	O	O	CHF
égalitaire	O	O	N	O	O	N	N	O	N	N	N	O	O	O
bénéfices résiduels	N	N	N	N	N	N	O	N	Q	N	O	O	N	O
méthodes comptables	N	N	N	N	N	N	LB	N	Q	N	PR	O	N	O
prop. au coût marginal	N	N	N	N	Q	Q	N	N	Q	Q	O	IU	N	O
Auman-shapley	N	N	N	N	Q	Q	O	N	Q	Q	O	IU	O	N
Shapley-Shubik	N	N	N	N	O	Q	O	N	Q	Q	O	O	O	N
nucléole	N	N	N	N	N	N	O	N	Q	Q	O	O	IDC	N
séquentielle radiale	O	O	O	N	R	RQ	N	O	Q	Q	O	R	N	CHF

Tableau 1 - Principes et propriétés des méthodes de partage de coûts

Généralement, on va rechercher des méthodes qui satisfont à plusieurs propriétés à la fois. Idéalement, on aimerait que le plus grand nombre de ces propriétés voire toutes soient satisfaites. Malheureusement, certaines propriétés peuvent être incompatibles entre elles. Un certain nombre de propositions ont été démontrées dans la littérature économique à ce sujet. D'autres propositions affirment que telle et telle propriété est satisfaite par telle ou telle méthode. D'autres enfin établissent qu'il y a une seule méthode qui satisfait simultanément à un ensemble donné de propriétés. On a énoncé un certain nombre de ces propositions dans cette section.

Ainsi, dans le cas des demandes unidimensionnelles et homogènes, il n'y a que la règle des coûts moyens pour satisfaire à la fois aux propriétés d'additivité, de cohérence, de proportionnalité et de traitement égalitaire des équivalents (les égaux dans ce cas-ci). En prime, on obtient la monotonie par rapport aux coûts. En fait, on sait qu'elle est la seule à satisfaire à la fois à la proportionnalité et à la monotonie par rapport aux coûts.

Toujours dans un contexte unidimensionnel, la méthode de répartition séquentielle est la seule à satisfaire à la fois à la préservation des rangs, à la gratuité pour des demandes identiques de coût nul, à la proportionnalité et à l'additivité. Cette dernière méthode satisfait également à la monotonie par rapport à la demande et au principe séquentiel. Elle est en fait caractérisée par ce dernier principe et le traitement égalitaire des égaux.

Dans le cas des demandes multidimensionnelles, la règle séquentielle radiale est la seule à satisfaire à la fois au principe séquentiel radial et au traitement égalitaire des demandes équivalentes. Par contre, il faut oublier l'insensibilité des contributions aux entités négligeables, l'additivité et même l'insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs.

Si on veut avoir l'additivité, l'insensibilité des contributions aux entités négligeables, la symétrie, l'invariance par rapport aux unités de mesure et la monotonie par rapport à la demande, c'est vers la règle Shapley-Shubik qu'il faut se tourner. Cette méthode est la seule à satisfaire à toutes ces propriétés à la fois. On peut même retrancher la monotonie par rapport à la demande de cette liste et remplacer l'invariance par rapport aux unités de mesure par l'ordinalité pour obtenir une autre caractérisation de la méthode Shapley-Shubik.

Ces propositions sont résumées dans le Tableau 2 chaque rangée indique un ensemble de propriétés, marquées d'un « X », que la méthode est la seule à satisfaire simultanément. Le « R » signifie qu'il faut remplacer (PS) par (PSR).

	RG	TE	S	PS	IEN	GR	MCT	MD	PR	IU	O	AD	CH
coûts moyens							X		X				
coûts moyens		X							X			X	X
séquentielle originale		X		X									
séquentielle originale	X					X			X			X	
Shapley-Shubik			X		X						X	X	
Shapley-Shubik			X		X			X		X		X	
séquentielle radiale		X		R									

Tableau 2 - Caractérisation des méthodes de partage de coûts

Par delà ces propriétés, la disponibilité et la qualité des données va conditionner la qualité des répartitions. Ainsi, toutes les règles qui sont basées sur la fonction C nécessitent la connaissance de cette fonction, au moins pour la demande Q et parfois pour toutes les demandes comprises dans l'ensemble défini par $0 \le y_i \le q_i$ pour $i = 1,\dots,n$. Dans le cas de la règle séquentielle, il faut au moins pouvoir calculer le coût des demandes intermédiaires, au nombre de n. Dans le cas de la règle de répartition proportionnelle au coût marginal, il faut connaître le coût marginal de chaque entité au point Q. Pour la règle Aumann-Shapley, il faut connaître ce coût marginal tout au long du segment $[0, Q]$.

Les règles qui font intervenir la fonction $\hat{c}$ nécessitent uniquement la connaissance de cette fonction. Avec la méthode Shapley-Shubik il faut connaître la valeur de cette dernière pour les $2^n - 1$ sous-ensembles possibles d'entités. Ce dernier nombre croît assez rapidement. Il est égal à successivement 3,7,15,31,63,127,255 lorsque n croit de 2 à 8. Cela ne pose évidemment aucun problème si on connaît la fonction C. Certaines règles de répartition proportionnelle font également intervenir des coûts spécifiques ca_i.. La valeur de ces derniers va influencer directement la répartition des coûts.

3.7 Conclusion : choix d'une méthode

La règle des coûts moyens est d'un usage très répandu dans les contextes unidimensionnels, i.e. lorsque les demandes des entités s'expriment par un seul nombre et que ces demandes peuvent être sommées pour donner la demande globale. Cette popularité s'explique sans doute pas la simplicité de cette règle. Comme on l'a vu, elle peut se justifier également par ses nombreuses propriétés. Elle satisfait en effet à la plupart de celles qui ont été recensées dans la section 3.4.

Une exception notable est le principe séquentiel, qui rend les contributions des plus petites entités indépendantes de l'ampleur des demandes des plus grosses. Pour les situations où l'impact des plus grosses demandes sur les contributions des plus petites entités est une préoccupation importante, la règle de répartition séquentielle est toute indiquée puisqu'elle satisfait au principe séquentiel. En fait, c'est la seule à satisfaire à ce principe en même temps qu'au traitement égalitaire des demandes équivalentes. Elle satisfait également à toutes les autres propriétés de la règle des coûts moyens, à l'exception de la monotonie par rapport aux coûts. De plus, elle peut être étendue à des contextes où les demandes sont hétérogènes ou multidimensionnelles.

C'est là une considération importante. Nous avons argué que la description de la plupart des problèmes réels requiert une liste de plusieurs nombres, listes qui de surcroît peuvent être différentes d'une entité à une autre. La pratique la plus répandue consiste à concevoir des méthodes de répartition proportionnelle pour ces contextes, en utilisant des clefs de répartition de toutes sortes. Malheureusement, le comportement des règles de répartition proportionnelle laisse beaucoup à désirer dans les contextes multidimensionnels. Les méthodes de ce type, même les plus sophistiquées, qui ont été proposées dans la littérature violent bon nombre des propriétés qu'on pourrait juger souhaitables. C'est le cas de la méthode des bénéfices résiduels, de la répartition proportionnelle aux coûts marginaux et des méthodes auxquelles on a donné le nom de *comptable* dans ce rapport et qui ont été proposées par Moriarity (1975), Louderback (1976) et Balachandran et Ramakrishnan (1981).

Par opposition aux méthodes de répartition proportionnelle, la règle séquentielle radiale conserve la plupart des propriétés de la règle séquentielle originale, bien que parfois sous une forme plus faible, dans les contextes multidimensionnels. La seule perte notable est l'additivité (AD) et l'insensibilité des contributions à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC). Ces dernières sont intéressantes parce qu'il arrive souvent qu'on souhaite faire la répartition des coûts, composante par composante. Par exemple, on peut vouloir répartir les coûts de capital séparément des frais d'exploitation. L'additivité garantit que, peu importe qu'il y ait décomposition des coûts ou non et peu importe la façon de les décomposer, la répartition totale sera la même. Si on sait que la méthode utilisée satisfait à cette propriété, on conviendra facilement qu'il est inutile de consacrer beaucoup d'énergie à la décomposition des coûts.

Dans le même ordre d'idée, on peut souhaiter imputer directement aux entités les coûts qui leur sont spécifiques et réserver l'utilisation d'une règle de répartition aux coûts qui sont véritablement communs. La distinction entre les deux n'étant pas toujours claire, on peut consacrer beaucoup d'efforts pour arriver à établir une telle distinction, à la satisfaction de toutes les entités. L'intérêt d'une règle qui satisfait à (IDC) est précisément qu'elle dispense de tous ces efforts parce que, en fin de compte, les résultats seront les mêmes, peu importe la décomposition adoptée.

Si les propriétés (AD) et (IDC) s'avèrent importantes, il faut oublier la règle séquentielle radiale pour les contextes multidimensionnels et se tourner plutôt vers les règles issues de la théorie des jeux coopératifs. Parmi ces dernières, celle de Shapley-Shubik est certainement la plus facile à utiliser. Avec cette dernière, on retrouve (AD) et (IDC). On gagne également l'insensibilité des contributions aux entités négligeables mais on doit sacrifier la préservation des rangs, le traitement égalitaire des demandes équivalentes (pour ne conserver que la symétrie), le principe séquentiel et l'insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes.

Dans ce domaine, comme dans bien d'autres, on ne peut donc tout avoir. Il y a des choix à faire et ces choix impliquent des coûts en termes des propriétés sacrifiées et de données requises. En vertu des résultats établis dans cette partie, le choix dans les contextes multidimensionnels devrait se faire entre la règle séquentielle radiale et la règle Shapley-Shubik, selon les propriétés privilégiées.

4 LA TARIFICATION

Dans un problème de partage des coûts, on suppose souvent, comme nous l'avons fait dans la partie qui précède, que les quantités demandées par les différents agents ou entités sont données au départ. Il s'agit alors de répartir entre ces derniers le coût de les satisfaire de façon conjointe. La question abordée dans la présente partie du rapport est plus générale. Nous admettons que la façon même de répartir les coûts peut avoir une influence sur les demandes elles-mêmes. Nous supposons donc que les agents, clients ou consommateurs ont une *fonction de demande* pour les biens et services, qu'on supposera pour le moment connue avec certitude. La question étudiée est celle de la détermination des tarifs auxquels les différents groupes d'agents, de clients ou de consommateurs seront soumis de façon à satisfaire un objectif déterminé (maximisation des profits, maximisation du bien-être, ou autre) en fonction le cas échéant de diverses contraintes, politiques, réglementaires ou autres, qui peuvent être imposées dans la détermination des tarifs.

De façon générale, les infrastructures (de transport, d'entreposage ou de liquéfaction dans le cas du gaz naturel) ont été mises en place à grand frais, alors que leur coût d'opération (en partie fixe et en partie variable) est relativement faible. L'intérêt général commanderait qu'on tarife l'usage de ces infrastructures en fonction du coût marginal de production et de distribution des biens et services considérés, en prenant soin d'y inclure tous les coûts d'opportunité, dont ceux liés à la congestion et à la pollution. À tout le moins, on devrait abaisser les tarifs de manière à assurer une utilisation maximale de ces infrastructures. Un problème de sous-financement se pose lorsque la tarification au coût marginal d'approvisionnement ne permet pas de couvrir les coûts totaux, tant les coûts d'infrastructures que les coûts d'approvisionnement.

Lorsque la tarification est faîte au coût marginal, nous obtenons ce que les économistes considèrent comme la solution de premier rang, correspondant à un optimum de Pareto. À l'autre bout du spectre, le gestionnaire de l'infrastructure pourrait exercer tout son pouvoir de marché le cas échéant et maximiser ses profits privés, compte tenu de la demande.

L'objectif visé se situe le plus souvent entre ces deux solutions. Il faut collecter suffisamment de recettes pour couvrir les coûts, une partie d'entre eux, ou encore pour assurer un niveau normal de profit ou de rentabilité où la norme est déterminée de manière exogène, possiblement par un organisme de réglementation. Dans l'intérêt général, les recettes totales doivent alors être prélevées de manière à rencontrer l'objectif fixé tout en s'éloignant le moins possible des consommations associées à la solution de premier rang pour le plus grand bien-être des citoyens. On cherche ce que les économistes appellent la solution de second rang, i.e. la meilleure solution étant donnée la contrainte budgétaire imposée au gestionnaire des infrastructures en question. Le problème de tarification est alors de caractériser et déterminer les tarifs de manière à atteindre cet objectif. C'est la problématique abordée dans cette partie du rapport.

Nous débutons par la tarification optimale à la Ramsey-Boiteux, aussi dite linéaire. Dans ce cas, il n'y a qu'un prix par unité de bien ou service, bien qu'il puisse varier d'un bien à un autre. Nous montrons par la suite qu'on peut faire mieux avec des tarifs polynômes ou non linéaires, comprenant des charges fixes, des prix d'usage, etc.

4.1 La maximisation des profits ou du bien-être : tarification à la Ramsey-Boiteux

La théorie économique nous enseigne que, pour assurer la maximisation du bien-être des consommateurs, les biens et services doivent être vendus à leur coût marginal social. Ce dernier inclut les dommages à l'environnement et les effets externes. Cependant, en présence d'économies d'échelle, ce mode de tarification donne un déficit. Une solution possible consiste à combler ce déficit par une subvention, comme on le fait souvent pour le transport en commun et la production de spectacles par exemple. Dans d'autres situations, cela est politiquement impossible et on requiert plutôt que le responsable de la production s'autofinance, au moins en partie. Pour ce faire, il doit alors majorer les prix, du moins certains d'entre eux, au dessus des coûts marginaux.

La règle de Ramsey-Boiteux indique comment opérer cette majoration, tout en générant le moins de distorsions possibles par rapport aux consommations efficaces ou de premier rang obtenues avec la tarification au coût marginal. Dans l'ensemble des tarifications linéaires, elle maximise le bien-être total des consommateurs sous la contrainte budgétaire. Elle suppose la fonction de demande connue ou, du moins, l'élasticité-prix de cette dernière.

Notons pour le moment que l’élasticité-prix directe et l’élasticité-prix croisée de la demande de gaz naturel s’adressant au négociant considéré (par exemple Gaz de France) mesure la variation en pourcentage de la demande suite à une variation en pourcentage des prix et permet donc de prendre en considération non seulement les préférences des clients/demandeurs mais aussi les alternatives que leur offre les autres négociants en gaz naturel et entreprises offrant des biens substituts. Une entreprise qui fait face à des pressions concurrentielles fortes [faibles] sera confrontée à une demande à forte [faible] élasticité. Ainsi, une entreprise qui pratique une tarification efficace à la Ramsey-Boiteux pour récupérer l’ensemble de ses coûts (y compris les coûts de congestion, les coûts environnementaux, le coût du capital, etc.) ou pour atteindre un niveau de rentabilité donné poursuit implicitement l’objectif d’éviter que ses clients actuels migrent vers des concurrents. Il sera plus aisé de comprendre la règle de Ramsey-Boiteux si on comprend bien la manière dont un monopole fixerait les prix pour maximiser son profit. On va donc commencer par ce problème, d'abord avec une catégorie de clients et ensuite deux. On passera ensuite assez naturellement à la règle de Ramsey-Boiteux.

4.1.1 La maximisation du profit avec une catégorie de consommateurs

Considérons un monopole qui produit un bien à un coût marginal c constant, signifiant que la production de toute unité supplémentaire entraîne un coût additionnel c. Ce monopole fait cependant face à un coût fixe C, nécessaire au fonctionnement et à l'entretien de l'infrastructure. C'est le type de configuration de coûts qui justifie l'existence d'un monopole. Dans ce cas, le coût marginal est en effet toujours inférieur au coût moyen et ce dernier est toujours décroissant. La tarification au coût marginal donnerait forcément un profit négatif.

Supposons pour l'instant qu'il n'y a qu'une catégorie de consommateurs, avec une demande dont l’élasticité est égale à $\eta(p)$. Pour maximiser le profit, le prix p doit être choisi de manière à satisfaire :

$$\frac{p-c}{p} = \frac{1}{\eta(p)} \tag{11}$$

Ainsi, pour maximiser le profit, il faut choisir un prix p de manière à ce que la marge $(p-c)$ réalisée par rapport au prix soit égale à l'inverse de l'élasticité.[17] De plus, le prix ne doit pas être si faible que la demande dépasse les capacités de production.

Une justification intuitive de l'expression ci-dessus est la suivante. La réduction du prix d'une unité $(\Delta p = -1)$ a deux effets. Le premier est négatif, puisqu'il correspond à une diminution directe du profit de $\Delta(p) \times q = -q$. Le deuxième effet est positif et correspond à l'accroissement de la quantité demandée suite à la baisse du prix. En vertu de la définition de l'élasticité, cette dernière est donnée par $\Delta q = \eta(p) \times \frac{q}{p}$. Elle entraîne une augmentation du profit d'un montant :

$$(p-c) \times \Delta q = (p-c) \times \eta(p) \times \frac{q}{p} = \frac{p-c}{p} \times \eta(p) \times q$$

Pour maximiser le profit, il faut qu'à la marge les deux effets s'annulent :

$$\frac{p-c}{p} \times \eta(p) \times q = q\,.$$

En divisant les deux parties de cette égalité par $\eta(p) \times q$, on obtient la règle (11).

Comme cas particulier, si le coût marginal de production c est nul, le prix doit être fixé de manière à égaliser l'élasticité à 1 ($\eta(p) = 1$). De façon générale, le prix p ne doit jamais être fixé de sorte que l'élasticité soit inférieure à 1. [18]

---

[17] Dans la littérature sur le monopole, on réfère au rapport $\frac{p-c}{p}$ sous le vocable d'indice de Lerner.

[18] Avec $\eta(p) < 1$, une augmentation de prix d'une unité $(\Delta p = 1)$ entraînerait une augmentation directe du profit de $\Delta p \times q = q$. La baisse indirecte, due à l'augmentation de prix, serait inférieure à la hausse directe. On aurait en effet $p \times \Delta q = \eta(p) \times q > -q$. En termes absolus, $|p \times \Delta q| < q$.

4.1.2 La maximisation du profit avec deux catégories de consommateurs

Considérons maintenant le cas où il existe deux catégories de consommateurs, avec des élasticités respectives $\eta_1(p)$ et $\eta_2(p)$, pouvant être servies à des coûts marginaux respectifs c_1 et c_2. Pour les mêmes raisons et suivant les mêmes intuitions que pour la maximisation du profit, la structure optimale des prix est donnée par la formule suivante :

$$\frac{p_1 - c_1}{p_1} = \frac{1}{\eta_1(p_1)} \qquad \frac{p_2 - c_2}{p_2} = \frac{1}{\eta_2(p_2)}$$

La marge réalisée par rapport au prix pour chaque type de consommateurs doit être égale à l'inverse de l'élasticité de la demande de ce même type de consommateurs. La marge réalisée par rapport au prix doit être d'autant plus importante que la demande des consommateurs a une faible élasticité. L'intuition derrière ces formules est la suivante. Les consommateurs dont la demande est moins élastique sont moins sensibles aux variations de prix que ceux dont la demande est plus élastique. Ils peuvent faire face à un prix plus élevé, payer une marge plus importante, sans pour autant diminuer sensiblement leur consommation. Les consommateurs ayant une élasticité plus grande paieront un prix plus proche du coût marginal qu'ils imposent au producteur. On veut ainsi qu'ils maintiennent la quantité demandée à un niveau élevé.

Comme cas particuliers, si les coûts marginaux des deux catégories de consommateurs sont nuls $(c_1 = c_2 = 0)$, alors chaque prix p_i doit être fixé de sorte que l'élasticité $\eta_i(p_i)$ soit égale à 1.

4.1.3 L'optimum de second rang avec deux catégories de consommateurs

Supposons dorénavant que le monopole n'ait pas le droit de maximiser ses profits mais qu'on lui permette simplement de couvrir ses coûts, i.e. d'atteindre l'équilibre budgétaire.[19] Comment alors doivent être fixés les prix qui atteignent l'objectif de second rang ? En suivant les mêmes intuitions, la règle est donnée par la formule suivante :

---

[19] S'agissant d'entreprises publiques, on pourrait exiger qu'elles récupèrent un certain pourcentage de leurs coûts. La notion d'équilibre budgétaire peut s'entendre dans ce sens également.

$$\frac{p_1 - c_1}{p_1} = \frac{\lambda}{\eta_1(p_1)} \qquad \frac{p_2 - c_2}{p_2} = \frac{\lambda}{\eta_2(p_2)} \tag{12}$$

Dans cette formule, λ est fixé de façon à satisfaire la condition d'équilibre budgétaire. On trouve cette valeur en résolvant un système d'équations simultanées, par tâtonnement si nécessaire. Si on pose $\lambda = 1$, on retrouve la solution qui maximise le profit. Avec $\lambda = 0$, on obtient les prix de la solution de premier rang, $p_1 = c_1$ et $p_2 = c_2$, qui donnent un déficit. La solution de second rang, correspondant au cas de l'équilibre budgétaire, est quelque part entre les deux: $0 < \lambda < 1$. Les prix qui sont définis par (12) sont dits de Ramsey-Boiteux.[20] La règle (12) elle-même est souvent appelée la *règle de l'inverse de l'élasticité*.

Si $c_1 = c_2 = 0$, les prix doivent être tels que :

$$\eta_1(p_1) = \eta_2(p_2) = \lambda \tag{13}$$

À l'optimum de second rang, les prix sont alors choisis de sorte que les élasticités des deux catégories de consommateurs soient égales et inférieures à l'unité. Ce résultat montre que la structure des prix est, dans un sens, équitable: les deux types de consommateurs réagissent de manière similaire à une augmentation marginale des prix, puisque leurs élasticités sont égales. Cette propriété d'équité est une caractéristique importante de la structure de ces prix.

Dans le cas plus général, les marges réalisées en fixant les prix optima de second rang (les membres gauches de (12)) sont proportionnelles, et non plus égales, à l'inverse des élasticités des demandes respectives des consommateurs. Les marges sont donc plus faibles que lorsque le profit de l'entreprise est maximisé. Le facteur λ, inférieur à 1, reflète la contrainte d'équilibre budgétaire imposée au gestionnaire de l'entreprise, qui ne peut pas profiter pleinement de son pouvoir de marché pour maximiser ses profits.

Comme pour la maximisation du profit, les consommateurs à forte élasticité bénéficient d'une marge plus faible, par rapport au coût marginal, que ceux à faible élasticité. L'intuition est la

[20] Pour une présentation plus poussée, voir Brown et Sibley (1986). Voir également Ramsey (1927) et Boiteux (1956)

même: si l'entreprise décidait d'une marge trop élevée, ces consommateurs auraient intérêt à se tourner vers un bien substitut. À l'inverse, les marchés où la demande est peu élastique peuvent supporter une marge plus élevée sans que les consommateurs modifient leur choix de façon sensible pour un produit substitut.

La règle de fixation des prix exprimée en (12) permet à l'entreprise d'atteindre l'équilibre budgétaire, tout en minimisant la distorsion par rapport à l'optimum de premier rang (pour lequel les prix sont égaux aux coûts marginaux). Même si les consommateurs à faible élasticité couvrent une plus grande part des coûts de fonctionnement et de maintenance, ils bénéficient tout de même de la présence des consommateurs dont l'élasticité est plus grande, puisque ceux-ci contribuent aussi à l'équilibre budgétaire de l'entreprise.

4.1.4 La prise en compte des élasticités croisées

Jusqu'à maintenant, il a été question de deux catégories de consommateurs mais d'un seul bien ou service. On peut interpréter la règle (12) comme s'appliquant à la demande pour deux biens différents mais à condition que la demande d'un bien dépende uniquement de son prix. Dans de nombreuses situations, les différents services dont il faut établir les tarifs sont cependant des substituts ou des compléments. Par exemple, l'électricité aux heures creuses est, jusqu'à un certain point, un substitut pour l'électricité aux heures de pointe. La quantité demandée dans une période dépend non seulement du tarif pour cette période mais également de celui qui s'applique aux autres périodes. On peut toujours choisir de faire la lessive durant les heures creuses plutôt qu'en période de pointe, en fonction du tarif pour les différentes périodes. Il importe alors d'en tenir compte dans la dérivation des tarifs optimaux.

Supposons que l'entreprise vende deux services et que la demande pour le service i soit donnée par $q_i = d_i(p_1, p_2)$. Convenons de noter $\eta_{12}(p_1, p_2)$ l'élasticité croisée de la demande du service 1 par rapport au prix du service 2. De même, $\eta_{21}(p_1, p_2)$ est l'élasticité croisée de la demande du service 2 par rapport au prix du service 1. La règle (12)devient alors :

$$\frac{p_1 - c_1}{p_1} = \frac{\lambda}{s_1} \qquad \frac{p_2 - c_2}{p_2} = \frac{\lambda}{s_2} \tag{14}$$

où

$$s_1 = \frac{\eta_2\eta_1 - \eta_{12}\eta_{21}}{\eta_2 - \eta_{12}\dfrac{p_2q_2}{p_1q_1}} \qquad s_2 = \frac{\eta_1\eta_2 - \eta_{21}\eta_{12}}{\eta_1 - \eta_{12}\dfrac{p_1q_1}{p_2q_2}}$$

Les termes s_1 et s_2 sont souvent appelés les super élasticités des demandes pour les deux biens. Ils deviennent respectivement η_1 et η_2 quand $\eta_{21} = \eta_{12} = 0$. À noter que les termes c_1 et c_2 peuvent ne pas être constants et même dépendre de tout le vecteur (q_1, q_2).

4.2 La tarification non linéaire

Si l'on se contente d'une tarification linéaire, définie par un seul nombre ou monôme, la formule de Ramsey-Boiteux indique comment faire payer les différents types de consommateurs de manière à maximiser le bien-être social. Cependant, la théorie économique nous enseigne qu'il est possible de faire mieux, en offrant aux consommateurs un menu de différents tarifs polynômes, parmi lesquels chacun peut librement choisir. Un tarif polynôme est un tarif non linéaire, défini par différents prix qui s'appliquent à différentes caractéristiques de la demande. Un tarif non linéaire peut, par exemple, être composé d'une charge fixe et de différents prix par unité pour différentes utilisations de l'infrastructure. Cette section débute avec la définition d'un tarif binôme (à deux parties). Ensuite, nous définissons un menu de tarifs binômes et nous généralisons enfin cette définition aux tarifs polynômes.[21]

4.2.1 Le menu de tarifs polynômes

Un tarif binôme est défini par un couple (f, p), où f est une charge fixe, par période de temps par exemple, et p une charge variable qui s'applique à l'utilisation de l'infrastructure (nombre de passages, nombres de minutes, distance parcourue, etc.). Considérons maintenant une suite de tarifs binômes $(f_1, p_1), (f_2, p_2), (f_3, p_3), \ldots,$ telle que :

$$p_1 > p_2 > p_3 > \ldots$$
$$f_1 < f_2 < f_3 < \ldots$$

[21] Pour une présentation plus extensive, voir Wilson (1993).

Cette suite constitue un menu de tarifs binômes, si l'on permet aux consommateurs de choisir, dans cette suite, le couple (f_i, p_i) suivant lequel ils vont être facturés. En supposant qu'ils vont choisir le meilleur tarif, c'est-à-dire celui qui minimise leurs dépenses totales, on obtient la courbe de facturation illustrée dans la Figure 3. Cette courbe illustre la recette totale obtenue d'un consommateur, en fonction de son utilisation de l'infrastructure. Chaque paire (f_i, p_i) définit une droite d'ordonnée à l'origine f_i et de pente p_i. Cependant, seules les parties pleines de la droite doivent être considérées, puisque tout point des parties en pointillés est dominé, en termes de coût, par un point situé en dessous, sur une autre droite.

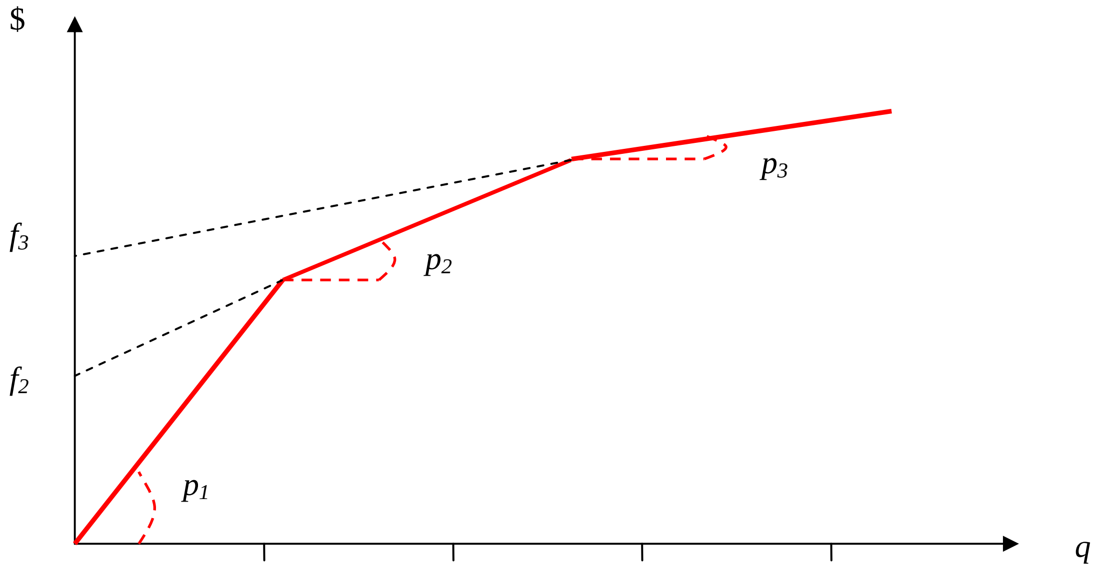


Figure 3 – Courbe des charges avec un menu de tarifs binômes

Le concept de tarif binôme peut être généralisé à un nombre quelconque de composantes. Par exemple, un tarif peut prendre la forme (f_i, p_i, r_i, s_i), où f_i est un charge fixe et p_i, r_i et s_i représentent des charges variables, chacune afférente à une caractéristique différente du service. Par exemple, p_i pourrait être le prix à la minute d'une communication Internet, r_i celui du volume d'information téléchargée et s_i celui du volume téléversé. Un tel vecteur est un tarif polynôme. Une suite de tarifs polynômes est un menu de tarifs polynômes.

La théorie économique récente nous enseigne qu'il est toujours possible de faire mieux avec un menu de tarifs polynômes qu'avec un tarif linéaire, disons $p_1 > c$. Plus exactement, il est possible d'avantager certains consommateurs, sans en défavoriser d'autres, tout en augmentant les recettes nettes. On peut comprendre comment en considérant deux consommateurs, l'un à faible demande et l'autre à forte demande. Soit q_1 et q_2 les utilisations respectives de l'infrastructure par ces deux consommateurs à un prix unique p_1. Supposons $q_1 < q_2$ et proposons maintenant le menu $\{(f_1, p_1), (f_2, p_2)\}$ aux consommateurs, avec $p_2 < p_1$ et des charges fixes $f_1 = 0$ et $f_2 = (p_1 - p_2)q_2$. Les consommateurs peuvent choisir la même tarification que précédemment, i.e. p_1, puisque $f_1 = 0$, ou bien ils peuvent choisir (f_2, p_2). La charge fixe f_2 satisfaisant :

$$f_2 + p_2 q_2 = p_1 q_2$$

le consommateur 2, en choisissant (f_2, p_2), paie la même facture qu'avec un prix unique p_1 et consomme la même quantité q_2. Toutefois, étant donné que le prix variable par unité de service est plus faible ($p_2 < p_1$), ce consommateur peut envisager d'augmenter sa demande, au moins à long terme, ce qui se traduira par une augmentation des recettes de l'entreprise.

En ce qui concerne le consommateur 1, il va vraisemblablement choisir de conserver la tarification initiale p_1, puisque, avec $q_1 < q_2$:

$$f_2 > (p_1 - p_2) q_1$$

et donc :

$$f_2 + p_2 q_2 > p_1 q_1$$

à moins qu'il ne trouve plus avantageux de payer la charge fixe f_2 et d'accroître sa consommation au prix p_2. En tout état de cause, il ne se plaindra pas, sa situation ne pouvant évoluer que dans le bon sens. Le fait que toutes les structures tarifaires soient disponibles à tous les consommateurs confère à cette forme de tarification un principe d'équité notable, celui d'absence d'envie. Chaque utilisateur peut choisir le tarif qui convient le mieux à ses besoins et ses particularités.

Si le gérant de l'infrastructure n'a pas besoin des recettes supplémentaires qu'apporterait ce menu de tarifs (s'il a déjà atteint l'équilibre budgétaire), il peut le redistribuer aux consommateurs en réduisant les charges f_i et p_i. Ainsi, on a montré comment, en partant d'un prix unique linéaire p_1, il est possible d'améliorer le bien-être de chaque agent en introduisant une autre tarification (f_2, p_2), où $p_2 < p_1$.

4.2.2 Le menu optimal

Une question venant naturellement à l'esprit est de savoir s'il existe une structure optimale pour de tels tarifs. La réponse est positive. Cette structure optimale dépend de la nature des différentes demandes, plus particulièrement des élasticités $\eta_1(p)$ et $\eta_2(p)$ des deux consommateurs ou groupes de consommateurs (marchés, demandes). En fait, quand on considère des tarifs polynômes, il faut distinguer l'élasticité par rapport à la charge fixe de l'élasticité par rapport à la charge variable. Ces élasticités sont en principe différentes et la structure tarifaire optimale dépend des deux.

Dans la recherche du menu optimal de tarifs, on doit s'assurer que le consommateur 1 choisira, volontairement et naturellement, le tarif (f_1, p_1), alors que le consommateur 2 préférera (f_2, p_2). En outre, les différents tarifs (f_i, p_i) doivent être conçus de sorte que la contrainte d'équilibre budgétaire soit vérifiée et que l'infrastructure soit utilisée de façon optimale, i.e. à son maximum.

Si l'on peut améliorer l'utilisation de l'infrastructure, tout en satisfaisant la contrainte d'équilibre budgétaire, en passant d'un tarif linéaire unique p_1 à un menu de tarifs binômes $\{(f_1, p_1), (f_2, p_2)\}$, on peut améliorer davantage l'utilisation de cette infrastructure avec un menu $\{(f_1, p_1), (f_2, p_2), (f_3, p_3)\}$ et ainsi de suite. Le nombre maximum de composantes à un menu de tarifs polynômes correspond au nombre de différents types de consommateurs ou groupes de consommateurs qui utilisent l'infrastructure.

Rappelons que, en construisant ce menu de tarifs, on doit s'assurer que chaque type de consommateur trouvera avantageux de choisir le tarif qui lui est destiné, c'est-à-dire que le consommateur 1 doit préférer (f_1, p_1) à tout autre tarif, le consommateur 2 le tarif (f_2, p_2), le consommateur 3 le tarif (f_3, p_3) et ainsi de suite. On dit alors que les tarifs permettent l'auto-sélection des consommateurs, ou encore que ces tarifs sont auto-sélectifs.

Il faut bien sûr traiter cette complication supplémentaire avec beaucoup d'attention. En particulier, les différents tarifs (f_i, p_i) doivent être déterminés de manière à satisfaire la contrainte d'équilibre budgétaire, tout en maximisant l'utilisation de l'infrastructure. L'élaboration de tarifs polynômes à *n*-parties est évidemment plus complexe que celle de tarifs binômes.

4.2.3 Un exemple

On a vu qu'une tarification polynôme peut être plus efficace qu'un tarif linéaire simple. On a aussi insisté sur le problème d'auto-sélection qu'il faut résoudre lorsqu'on établit une telle tarification. Voyons maintenant un exemple illustrant ces idées. En particulier, on va déterminer un couple de tarifs binômes qui permet d'atteindre une solution plus efficace que celle obtenue par les prix de Ramsey-Boiteux.

Supposons qu'il existe deux consommateurs, dont les fonctions de demande respectives sont :

$$q_1 = 100 - 10p_1$$

$$q_2 = 10 - 0.5p_2$$

Le coût total qui doit être couvert est fixe et égal à 75$.

4.2.3.1 Les tarifs de Ramsey-Boiteux

Les prix de Ramsey-Boiteux sont les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{10p_1}{100-10p_1} = \dfrac{0.5p_2}{10-0.5p_2} \\ \\ 100p_1 - 10p_1^2 + 10p_2 - 0.5p_2^2 = 75 \end{cases}$$

La première équation est équivalente à $\eta_1(p_1) = \eta_2(p_2)$ et la deuxième représente la contrainte d'équilibre budgétaire. La solution est :

$$p_1 = 0.6698$$

$$p_2 = 1.3397$$

Si ces prix sont proposés aux consommateurs, leurs demandes respectives sont :

$$q_1 = 93.302$$

$$q_2 = 9.3301$$

4.2.3.2 Les tarifs binômes auto-sélectifs

Avec les tarifs de Ramsey-Boiteux, le consommateur 2 préférerait payer p_1 plutôt que p_2. Ce résultat est général : la tarification à la Ramsey-Boiteux ne satisfait pas au principe d'absence d'envie. Cela signifie qu'elle ne satisfait pas à la contrainte d'auto-sélection non plus : le consommateur 2 a intérêt à se faire passer pour le consommateur 1.

On va à présent montrer qu'il existe une structure tarifaire (un menu) $\{(f_1, p_1), (f_2, p_2)\}$ permettant d'atteindre une meilleure solution que celle obtenue avec les prix de Ramsey-Boiteux. Rappelons que f_i est une charge fixe, p_i un tarif par unité consommée et que chaque consommateur peut librement choisir entre les deux paires (f_1, p_1) et (f_2, p_2). Cette structure tarifaire est $\{(8,\ 0.574),\ (2,\ 1.1493)\}$. Les deux composantes de ce menu de tarifs binômes définissent les deux droites tracées sur la Figure 4. La courbe formée des deux segments pleins donne les dépenses totales en fonction de la quantité demandée.

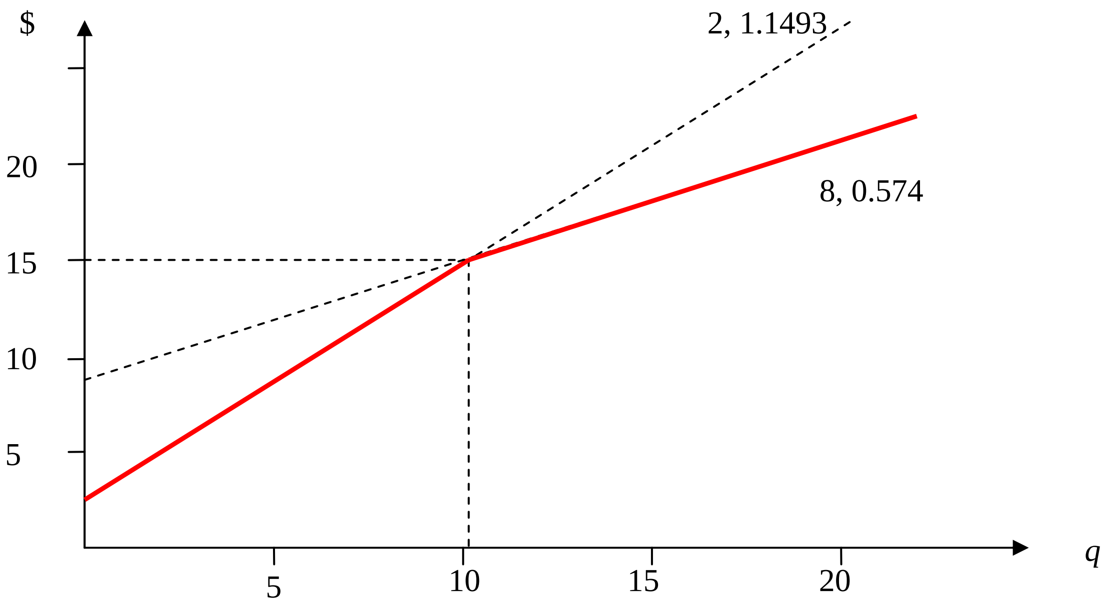


Figure 4 – Deux tarifs binômes

Pour l'instant, faisons l'hypothèse simplificatrice que les charges fixes, 8 ou 2, n'ont pas d'impact sur la demande des consommateurs. Seules les charges variables entrent en ligne de compte dans leurs fonctions de demande. Si le consommateur 1 choisit la paire (8, 0.574) et le consommateur 2 la paire (2, 1.1493), leurs demandes respectives sont :

$$q_1 = 94.26$$

$$q_2 = 9.425$$

Ces consommations sont supérieures à celles calculées avec les prix de Ramsey-Boiteux. En outre, les recettes liées à cette tarification sont exactement de 75$.

Il reste à montrer que le consommateur 1 va effectivement choisir la paire $(8,\ 0.574)$ et le consommateur 2 la paire $(2,\ 1.1493)$. Sur la Figure 4, on voit que $q_1 = 94.26$ coûte moins cher au consommateur 1 avec le premier tarif qu'avec le deuxième et que $q_2 = 9.425$ coûte moins cher au consommateur 2 avec le deuxième tarif qu'avec le premier. De plus, q_1 se situe à droite du point d'équivalence des deux tarifs, alors que q_2 se situe à gauche de ce point.

Cependant, on devrait comparer les surplus des consommateurs plutôt que les dépenses totales. Que sont ces surplus ?

Considérons la fonction de demande représentée dans la figure suivante.

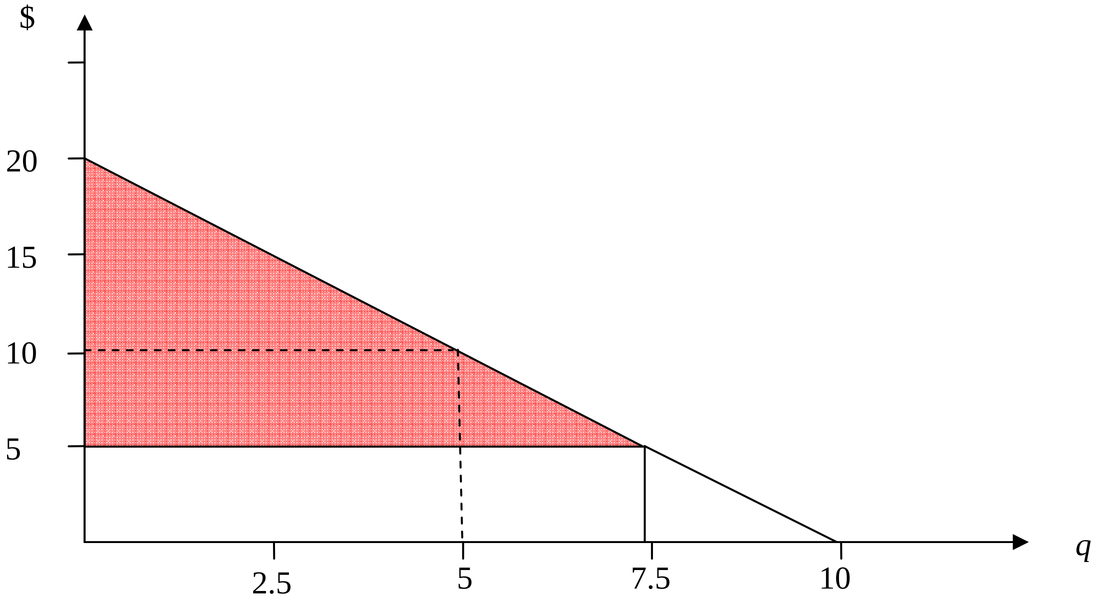


Figure 5 – Le surplus des consommateurs lorsque le prix est fixé à 5 $

Si le tarif linéaire est 5$, alors le surplus des consommateurs dans ce marché est donné par l'aire ombrée, moins toute charge fixe f . En effet, on peut interpréter la courbe de demande comme représentant le prix maximum que le consommateur est prêt à payer pour chaque unité de service. Ainsi, s'il paie en réalité 5$ pour une unité qu'il serait prêt à payer 10$, comme pour la 5[e] unité, le consommateur réalise un surplus de 5$ sur cette unité. En reproduisant ce même raisonnement pour toutes les unités de bien achetées, on obtient le triangle ombré, qui représente le surplus brut du consommateur. Le surplus net s'obtient en retranchant la charge fixe qu'il doit payer pour avoir accès à l'infrastructure. Avec une fonction de demande de la forme $q = b - ap$, le surplus, fonction de f et de p , est facile à calculer. Il s'écrit :

$$S(f,p) = \frac{\left(\frac{b}{a} - p\right)(b - ap)}{2} - f$$

Appliquons cette formule pour calculer le surplus du consommateur 1 avec chacun des deux tarifs binômes. On obtient :

$$S_1(8,\ 0.575) = 436.24$$

$$S_1(2,\ 1.1493) = 389.67$$

Il est clair que le consommateur 1 gagne à choisir la première paire de la structure tarifaire, $(8,\ 0.574)$. Quant au consommateur 2, on obtient :

$$S_2(8,\ 0.574) = 86.34$$

$$S_2(2,\ 1.1493) = 86.83$$

Le consommateur 2 a donc intérêt à choisir le tarif $(2,\ 1.1493)$.

En résumé, cette tarification, où les paires (charge fixe, charge variable) ont été spécialement déterminées pour les consommateurs 1 et 2, entraîne une solution meilleure que celle de Ramsey-Boiteux et satisfait au principe de non envie et à la condition d'auto-sélection. Il n'est donc pas nécessaire d'imposer un tarif à un consommateur. Cette tarification permet aussi d'accroître le surplus de chaque consommateur. Remarquons aussi que les charges variables de chaque tarif tiennent compte des différentes élasticités de la demande. On a en effet $p_1 < p_2$ comme avec la règle de Ramsey-Boiteux. En fait, p_1 et p_2 sont les prix optimaux de Ramsey-Boiteux pour $f_1 = 8$ et $f_2 = 2$. Toutefois, ces choix de f_1 et f_2 ne sont pas nécessairement optimaux.

4.2.4 La prise en compte de l'effet de la charge fixe

Jusqu'à maintenant, on a supposé que les charges fixes, f_1 et f_2, n'avaient aucun impact sur la demande. En réalité, elle peut influencer la demande. Supposons donc que la partie fixe du tarif a un effet négatif sur la quantité demandée. Par exemple, supposons que la fonction de demande soit de la forme $d(f,p) = b - ap - cf$. La fonction de surplus d'un consommateur s'écrit alors :

$$S(f,p) = \frac{\left(\frac{b-cf}{a} - p\right)(b - cf - ap)}{2} - f$$

Soit les demandes des deux consommateurs :

$$q_1 = 100 - 10p_1 - 0.5f_1$$

$$q_2 = 10 - 0.5p_2 - 0.5f_2$$

Avec de telles fonctions de demande, voyons que les tarifs non linéaires :

$$\{(11.2638,\ 0.574), (4.7751,\ 1.1493)\}$$

satisfont la condition d'auto-sélection. En effet, les surplus du consommateur 1 selon ces deux tarifs sont :

$$S_1(11.2638,\ 0.574) = 381.4832$$

$$S_1(4.7751,\ 1.1493) = 366.052$$

Ainsi, il est clair que le consommateur 1 va choisir le premier tarif $(11.2638,\ 0.574)$. Les surplus du consommateur 2 sont :

$$S_2(11.2638,\ 0.574) = 5.3915$$

$$S_2(4.7751,\ 1.1493) = 44.7555$$

Le consommateur 2 préfère donc le deuxième tarif $(4.7751,\ 1.1493)$. En somme, les consommateurs 1 et 2 ont toujours intérêt à choisir les tarifs respectifs $(11.2638,\ 0.574)$ et $(4.7751,\ 1.1493)$ qui ont été conçus pour eux.

4.3 Conclusion

La tarification efficace exige qu'on connaisse les élasticités des demandes. Il reste encore beaucoup à faire à ce chapitre. Il faut distinguer les élasticités par rapport aux prix propres des élasticités croisés de court terme (plus faibles) et de moyen ou long terme (plus élevées). C’est par la modélisation des élasticités que les effets des pressions concurrentielles peuvent être pris en compte.

Les tarifs des négociants en gaz naturel ont souvent des structures en plusieurs parties, fixe et variable, qui peuvent être dégressives sur certains intervalles. Les services de tarification de ces négociants en gaz naturel cherchent à définir ces tarifs en tenant compte de la nature de la demande des différents clients. Dans les entreprises en général, cela se fait plus souvent sur des bases subjectives, à défaut de pouvoir compter sur une bonne approche théorique et sur l’existence et le traitement adéquat des données empiriques nécessaires.

La question qui devrait intéresser les négociants en gaz naturel et leurs régulateurs est de savoir si les tarifs peuvent prétendre à une quelconque optimalité ou efficacité économique. Des recherches plus poussées du côté des élasticités et de la répartition des différents types de clients de façon plus générale, de même que sur les coûts marginaux de desservir ces clients à différents moments dans le temps, pourraient permettre d'apporter des éléments de réponse à cette question.

La valorisation des infrastructures passe en partie par la répartition efficace de leur coût. De plus, on exige souvent qu'une infrastructure se finance par la tarification, en totalité ou du moins en partie. Dans ce rapport, nous avons voulu montrer comment on peut approcher cette question de la manière la plus efficace possible en fixant les prix de manière à se rapprocher le plus possible d'un optimum de premier rang. En pratique, diverses contraintes, autres que la contrainte budgétaire, peuvent influencer la tarification. L'approche générale et les principes de tarification que nous avons développés dans ce rapport permettent de considérer des contraintes de toutes sorte.

Un des concepts qui ont été explorés est celui de la tarification à la Ramsey-Boiteux, qui consiste à fixer les prix des différents biens ou services en fonction de l'inverse de l'élasticité de leurs fonctions de demande. Les tarifs polynômes semblent encore plus intéressants. Ils peuvent être construits comme des menus de différentes composantes, où chaque composante comprend une charge fixe (abonnement) et de prix relatifs à différentes caractéristiques de la consommation. L'aspect le plus important de cette approche est que les consommateurs ont la liberté de choisir, dans le menu, la composante qui lui convient le mieux.

Par contre cette tarification n'est pas immune aux critiques au plan de l'équité. De plus, dans un contexte concret, il peut être difficile d'avoir toute l'information requise (par exemple l'information sur les demandes) pour calculer les prix de Ramsey-Boiteux. La tâche risque de s'avérer encore plus difficile s'il s'agit d'établir un menu de tarifs non linéaires.

5 CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans notre rapport, nous proposons une approche globale à la tarification intégrant une étape de partage de coûts communs. Nous présentons également les principales méthodes de partage des coûts et de tarification permettant aux décideurs de prendre des décisions sur la base de critères explicites rigoureux. Des études plus poussées devraient permettre de déterminer la combinaison méthode de partage de coûts / méthode de tarification la plus à même d'embrasser les contraintes et objectifs de Gaz de France.

Deux conclusions peuvent cependant d'ores et déjà être dégagées de ces premiers travaux. D'une part, le choix d'une méthode de partage de coûts communs doit être fondé sur les propriétés que vérifie cette dernière. L'utilisation de grands principes associés à ces propriétés peut aider ensuite à construire l'argumentaire entourant la communication et la défense du choix effectué. D'autre part, nonobstant le caractère efficace ou optimal de cette procédure, il est possible que son application entraîne le façonnement de tarifs qui pourraient être perçus comme difficilement acceptables au plan politique. Dans un tel cas, il serait inopportun de modifier de manière ad hoc la règle de partage des coûts communs, choisie au départ pour ses propriétés d'efficacité, d'équité ou de cohérence, ou la règle de tarification à la Ramsey-Boiteux (contraintes de tarifs uniformes et de profitabilité), permettant de s'éloigner le moins possible des niveaux de consommation efficaces (obtenus par une tarification au coût marginal). Il faudrait plutôt recourir à des mécanismes incitatifs de support direct pour aider et compenser les clients à protéger et ce, sans manipulation des tarifs.

Partage des coûts efficace, équitable et cohérent d'un côté et tarification optimale (accompagnée de mécanismes d'atténuation des impacts, le cas échéant) de l'autre sont des outils essentiels et complémentaires qui permettront à Gaz de France de gagner en compétitivité et performance.

Mais partage des coûts et tarification sont des considérations qui suivent chronologiquement la réalisation d'investissements en infrastructures qui eux-mêmes doivent faire l'objet d'une optimisation rigoureuse. La chronologie ne doit cependant pas faire oublier que la valorisation des infrastructures communes doit reposer sur les trois piliers que constituent les méthodologies de choix d'investissements[22], de partage des coûts et de tarification. Nous n'avons traité dans notre rapport que des deux dernières. Mais il ne faut pas oublier qu'il faut se préoccuper aussi de la première. Le trio méthodologique n'aura en définitive que la puissance du maillon le plus faible.

[22] Voir à ce sujet Boyer et Gravel (2005) et Boyer et al. (2003).

BIBLIOGRAPHIE

Aumann, R.J. et L.S. Shapley, 1974. *Values of Non-Atomic Games*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Balanchandran, B. et R. Ramakrishnan, 1981. "Joint Cost Allocation: a Unified Approach", *Accounting Review*, 56, 85-96.

Biddle, G.C. et R. Steinberg, 1985. "Common Cost Allocation in the Firm", in H.P. Young, (ed.), *Cost Allocation: Methods, Principles, Applications*, North-Holland, 31-54.

Boiteux, M., 1956. "Sur la gestion des monopoles astreints à l'équilibre budgétaire", *Econometrica*, 24, 22-40.

Boyer, M., P. Christoffersen, P. Lasserre et A. Pavlov, 2003. "Création de valeur, gestion de risques et options réelles", Rapport Bourgogne du CIRANO, 2003RB-01.

Boyer, M., et E. Gravel, 2005. "Évaluation de projets : la valeur actualisée nette optimisée (VAN-O)", Cahiers Scientifique du CIRANO, 2005s-37, à paraître dans *Assurance et gestion des risques*.

Brown, S.J., et D.S. Sibley, 1986. *The theory of public utility pricing*, Cambridge University Press, Cambridge.

Friedmann, E. et H. Moulin, 1999. "Three Methods to Share Joint Costs or Surplus", *Journal of Economic Theory*, 87, 275-312.

Gangolly, J.S., 1981. "On Joint Cost Allocation : Independent Cost Proportional Scheme (ICPS) and its Properties", *Journal of Accounting Research*, 19, 299-312.

Hart, S. et A. Mas-Colell, 1989. "Potential, Value and Consistency", *Econometrica*, 57, 589-614.

Koster, M., S. Tijs et P. Borm, 1998. "Serial Cost Sharing Methods for Multicommodity Situations", *Mathematical Social Science*, 36, 229-242.

Louderback, J.G., 1976. "Another Approach to Allocating Joint Costs: A Comment", *Accounting Review*, 50, 683-85.

Mirman, L.J., D. Samet et Y. Tauman, 1983. "An Axiomatic Approach to the Allocation of a Fixed Cost through Prices", *Bell Journal of Economics*, 14, 139-151.

Mooney, G., 1994. *Key Issues In Health Economics*, Harvester Wheatsheaf, Hertfordshire, UK.

Moulin, H., 1986. *Game Theory for the Social Sciences*, New-York: New-York University Press.

Moulin, H. et S. Shenker, 1992. "Serial Cost Sharing", *Econometrica*, 50, 5, 1009-1039.

Moulin, H. et S. Shenker, 1994. "Average Cost Pricing Versus Serial Cost Sharing: an axiomatic comparison", *Journal of Economic Theory*, 64, 1, 178-201.

Moriarity, S., 1975. "Another Approach to Allocating Joint Costs", *Accounting Review*, 49, 791-795.

Okada, N., 1985. "Cost Allocation in Multipurpose Reservoir Development : The Japanese Experience", in H.P. Young (ed.), *Cost Allocation : Methods, Principles, Applications*, North-Holland, 3-29.

Ramsey, F.P., 1927. "A Contribution to the Theory of Taxation", *Economic Journal*, 37, 47-61.

Ransmeier, J.S., 1942. *The Tennessee Valley Authority : A Case Study in the Economics of Multiple Purpose Stream Planning*, Nashville, TN: Vanderbilt University Press.

Shapley, L.S., 1953. "A Value for n-Person Games", dans Kuhn, H., et W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Princeton: Princeton University Press, 307-317.

Shenker, S., 1990. "Making Greed Work in Netwoks: A Game-Theoretic Analysis of Gateway Service Disciplines", Mimeo, Xerox Research Center, Palo Alto.

Shubik, M., 1962. "Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Joint Costs and Internal Pricing", *Management Science*, 8, 325-43.

Sprumont, Y., 1998. "Ordinal cost sharing", *Journal of Economic Theory*, 81, 126-162.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2000. "Serial Cost Sharing with Many Goods and General Aggregation", Cahier de recherche 0007, Département d'économique, Université Laval.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2002. "Serial Cost Sharing in Multidimensional Centexts", *Mathematical Social Science*, 44, 277-299.

Train, K.E., 1977. "Optimal Transit Prices under Increasing Returns to Scale and a Loss Constraint", *Journal of Transport Economics and Policy*, 11(2), 185-94.

Wang, Y.T., 2002. "Proportionally Adjusted Marginal Pricing Method to Share Join Costs", *Review of Economic Design*, 7, 205-211.

Wilson, R.B., 1993. *Nonlinear Pricing*, Oxford University Press, NY.

Young, H.P., 1985. "Monotonicity in Cooperative Games", *International Journal of Game Theory*, 13, 65-72.

Young, H.P., 1994. "Cost Allocation", dans R.J.Aumann et S. Hart (eds), *Handbook of Game Theory*, Vol. II, Amsterdam: North-Holland, Chap. 34, 1191-1235.