2002RP-19

Partage des coûts et tarification des infrastructures
Les méthodes de partage de coûts
Propriétés

Marcel Boyer, Michel Moreaux, Michel Truchon

Rapport de projet
Project report

Montréal
Novembre 2002
Révisé en juillet 2003

CIRANO
Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations

ISSN 1499-8610 (Version imprimée) / ISSN 1499-8629 (Version en ligne)

Partage des coûts et tarification des infrastructures Les méthodes de partage de coûts Propriétés[*]

Marcel Boyer[†], *Michel Moreaux*[‡], *Michel Truchon*[§]

Résumé / *Abstract*

Il est important de faire le choix d'une méthode de partage des coûts sur la base de ses propriétés, avant même de connaître les résultats qu'elle peut donner. L'objet du présent document est de départager les méthodes de répartition des coûts sur la base de propriétés générales qu'elles peuvent ou non satisfaire. Nous énonçons un certain nombre de propriétés relatives à l'équité et à la cohérence, souhaitables de façon générale ou dans certaines circonstances. Nous présentons divers résultats indiquant quelles propriétés sont satisfaites par quelles méthodes dans quels contextes.

It is important that the choice of a cost sharing method be made on the basis of its general equity and consistency properties rather than on the basis of the results it may generate in a given application. In this paper, we partition the different methods according to whether they satisfy a given property or not. In so doing, we present a set of results relative to what methods satisfy what properties in what contexts.

Mots clés: Partage des coûts, tarification, infrastructures, jeux de coûts.

Keywords: *Cost sharing, Pricing, Infrastructures, Cost Games.*

---

[*] Cette version du rapport a été remise au Ministère des Finances du Québec (MFQ) dans le cadre d'un partenariat de recherche entre le MFQ et le CIRANO. Les auteurs tiennent à remercier le Ministère pour son soutien financier. Il va de soi qu'ils sont les seuls responsables des opinions et analyses contenues dans ce document, qui ne représentent pas nécessairement celles du CIRANO ou du MFQ. Les auteurs acceptent également la responsabilité de toute erreur qui aurait pu se glisser dans le texte.

[†] CIRANO et Département de sciences économiques, Université de Montréal

[‡] LEERNA, IDEI, IUF, Université de Toulouse I

[§] CIRANO, CIRPÉE et Département d'économique, Université Laval, **auteur principal**

Table des matières

1 Introduction

Dans Boyer, Moreaux et Truchon -ci-après BMT- (2002b)[1], on a présenté un survol des principales méthodes de répartition de coûts qu'on retrouve dans la littérature. On les a regroupé en trois catégories, les méthodes de proportionnalité, celles qui sont issues de la théorie des jeux coopératifs et les méthodes de répartition séquentielle. On a comparé ces méthodes à l'aide d'un exemple fictif de gazoduc. Toutefois, il serait dangereux de choisir une méthode sur la base d'un seul ou même de quelques exemples. Une méthode peut produire des résultats satisfaisants dans un contexte particulier mais elle peut donner des aberrations lorsque ce contexte vient à changer (arrivée d'un nouveau partenaire, changements dans les besoins, les coûts, etc.). Idéalement, il faudrait faire le choix d'une méthode sur la base de ses propriétés, avant même de connaître les résultats qu'elle peut donner. Aussi, est-il important de chercher à départager les méthodes de répartition des coûts sur la base de propriétés générales qu'elles peuvent ou non satisfaire. C'est l'objet du présent document.

On commence par énoncer un certain nombre de propriétés qu'on pourrait juger souhaitables, de façon générale ou dans certaines circonstances. Certaines d'entre elles peuvent être associées à des considérations d'équité : comment traite-t-on les demandes comparables, y a-t-il protection des petits contre l'ampleur de la demande des plus gros, comment les parts des coûts évoluent-elles avec les demandes et les coûts, dans quels intervalles les contributions se situent-elles ? Les autres propriétés concernent la cohérence des règles de répartition : les contributions sont-elles indépendantes du choix des unités de mesure, sont-elles proportionnelles aux demandes lorsque les coûts le sont, sont-elles les mêmes, qu'on applique la règle au coût total ou séparément à différents éléments de coûts, etc. ? Ces deux catégories ne sont cependant pas parfaitement étanches. Certaines propriétés normatives incorporent des éléments de cohérence et réciproquement.

Après avoir passé en revue les différentes propriétés, on examine chacune des règles présentées dans BMT (2002b) et on indique quelles sont les propriétés qu'elles satisfont et

[1] BMT (2002a) est le document [1] de la présente série sur le partage des coûts et la tarification des infrastructures. La liste de ces documents est donnée en annexe.

qu'elles sont celles qu'elles violent dans au moins un contexte. Ces résultats sont résumés dans le Tableau 1 de la page 28. Certaines méthodes peuvent être caractérisées comme étant les seules à satisfaire un certain sous-ensemble de propriétés. À l'inverse, certaines propriétés sont incompatibles entre elles. On énonce un certain nombre de propositions à ce sujet. Les démonstrations sont données dans les annexes, à moins que les propositions aient déjà été démontrées dans la littérature. Le Tableau 2 de la page 30 résume un certain nombre de caractérisations. On termine le document avec quelques considérations sur le choix d'une méthode.

2 Propriétés normatives

Les propriétés, dites normatives, sont regroupées en cinq catégories qui font l'objet d'autant de sous-sections. Rappelons qu'un problème de partage de coûts est défini par le vecteur des demandes de n entités, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, où les composantes q_i peuvent également être des vecteurs, et par une fonction C qui donne le coût $C(Q)$ de satisfaire à la demande Q. Une règle de partage de coûts est une fonction x qui, pour toute demande Q et toute fonction de coût C, spécifie la part du coût $C(Q)$ supportée par les différentes entités. On note $x_i(Q, C)$ la charge imputée à l'entité i et $x(Q, C)$ le vecteur de ces dernières.

On représente la demande d'un sous-ensemble S d'entités par Q^S, qui est le vecteur Q dans lequel toutes les demandes, autres que celle des entités de S, sont ramenées à 0. Le coût de satisfaire uniquement aux demandes des entités de S est donc $C\left(Q^S\right)$. Comme cas particulier, on a $C\left(Q^{\{i\}}\right)$, qui est le *coût de faire cavalier seul*. On pose également $c_i(q_i) = C\left(Q^{\{i\}}\right)$ pour chaque entité i.

2.1 Traitement égalitaire des équivalents

Le minimum qu'on puisse demander à une règle de partage de coûts, c'est qu'elle traite de la même façon les entités qui ont des demandes comparables et en particulier des demandes identiques. C'est ce qu'exige la condition (TEE) ci-dessous. De manière plus générale, la comparaison entre les demandes de deux entités pose problème lorsqu'elles portent sur des biens ou caractéristiques différentes. Toutefois, on peut considérer ces demandes comme étant suffisamment similaires si les quantités demandées sont les mêmes et si on peut interchanger les demandes des deux entités sans changer le coût total. C'est le cas lorsque la fonction de coût est symétrique par rapport aux demandes des deux entités. De façon précise, la fonction C est symétrique par rapport aux demandes de deux entités i et j si $C(Q) = C(Q_{ij})$ pour toute demande Q et la demande Q_{ij} obtenue en interchangeant simplement q_i et q_j dans Q. La condition (S), plus forte que (TEE), exige que de telles demandes soient également traitées de la même façon. Finalement, on peut considérer des demandes comme étant équivalentes si elles satisfont un même critère. Celui qu'on a retenu dans le document précédent est le coût de faire cavalier seul. La condition (TE), plus forte que les deux autres, exige que des demandes ayant le même coût de faire cavalier seul soient également traitées de la même façon. Une dernière condition va plus loin. Elle exige que les contributions exigées des entités aillent dans le sens de leurs coûts de faire cavalier seul.

Traitement égalitaire des égaux (TEE) Cette propriété dit que, si les biens sont homogènes et si deux entités demandent les mêmes quantités de ce bien, elles devraient se voir imputer la même part des coûts totaux. De façon formelle, $q_i = q_j$ devrait entraîner $x_i(Q, C) = x_j(Q, C)$.

Symétrie (S) Une règle de partage de coûts satisfait à la symétrie si $q_i = q_j$ entraîne $x_i(Q, C) = x_j(Q, C)$, lorsque la fonction C est symétrique par rapport aux demandes des entités i et j. Cette propriété est en fait un cas particulier de (TE).

Traitement égalitaire des équivalents (TE) Cette propriété dit que, si deux entités ont des coûts de faire cavalier seul identiques, elles devraient se voir imputer la même part des coûts totaux. De façon formelle, $c_i(q_i) = c_j(q_j)$ devrait entraîner $x_i(Q, C) = x_j(Q, C)$.

Préservation des rangs (RG) Selon cette propriété, les contributions relatives aux coûts totaux des différentes entités devraient aller dans le sens de leurs coûts de faire cavalier seul. De façon formelle, $c_i(q_i) \leq c_j(q_j)$ devrait entraîner $x_i(Q, C) \leq x_j(Q, C)$.

Remarque 1 La propriété (RG) implique (TE), qui implique (S), qui implique (TEE).

2.2 Le principe séquentiel

Dans certaines situations, on peut se préoccuper de l'impact des demandes importantes sur les contributions des entités dont les demandes sont plus faibles. Par exemple, s'agissant de partager le coût d'une route menant à différents sites en forêt, les tenants des sites les plus rapprochés peuvent souhaiter ne pas être à la merci de ceux qui pourraient aller s'installer à l'autre bout du monde. À l'inverse, dans un projet où les économies d'échelle sont importantes, une entité ayant de gros besoins peut souhaiter que ce ne soit pas les petits qui profitent, à ses dépens, des économies d'échelle dont il est responsable. Les propriétés qui sont présentées dans cettes sous-section stipulent l'invariance des contributions exigées des petits par rapport à l'ampleur des plus grandes demandes. Elles sont à la base des règles de répartition séquentielle.

La première de ces propriétés est énoncée directement en termes de l'ampleur des demandes, telles que mesurées par les quantités demandées. Cette définition a du sens dans le contexte où les entités exigent un même bien privé et où elles peuvent être ordonnées en termes des quantités demandées. Dans un contexte plus général, les quantités demandées ne sont pas nécessairement comparables entre elles. Comment ordonner les entités dans un tel contexte ? La réponse de Sprumont (1998) à cette question est d'ordonner les entités par rapport aux contributions exigées d'elles selon la règle de partage envisagée. Cela donne lieu au principe séquentiel. Dans un contexte général où les demandes peuvent prendre toutes sortes de formes, le principe séquentiel est très exigeant. On peut l'affaiblir et exiger seulement que les contributions des petits ne changent pas dans l'éventualité où les plus gros augmentent leurs demandes de façon proportionnelle. En résulte alors le principe séquentiel radial.

Insensibilité à l'ampleur des plus grandes demandes (PG) Cette propriété exige que la contribution d'une entité ne soit pas affectée par l'ampleur des demandes plus grandes que la sienne. Une entité ne devrait pas subir les externalités associées à ces plus grandes demandes, ou en profiter selon le cas. On la définit formellement comme suit. Soit une entité i et deux demandes Q et Q' telles que $q'_j = q_j$ pour $j = i$ et pour tout j tel que $q_j < q_i$ et $q'_j \geq q_j$ pour tout $j \neq i$ tel que $q_i \leq q_j$. On devrait alors avoir $x_i(Q, C) = x_i(Q', C)$.

Principe séquentiel (PS) Il s'agit d'une version plus forte de la propriété précédente. Elle dit que la contribution d'une entité ne devrait pas être affectée par l'ampleur des demandes des entités dont les contributions sont plus élevées que la sienne. On la définit formellement comme suit. Soit une entité i et deux demandes Q et Q' telles que :

- $q'_j = q_j$ pour $j = i$ et pour tout j tel que $x_j(Q, C) < x_i(Q, C)$,
- $q'_j \geq q_j$ pour tout j tel que $x_i(Q, C) \leq x_j(Q, C)$.

On devrait alors avoir $x_i(Q, C) = x_i(Q', C)$

Principe séquentiel radial (PSR) Il s'agit d'une version plus faible de la propriété précédente. Elle dit que la contribution d'une entité ne devrait pas être affectée par une **augmentation proportionnelle** des demandes des entités dont les contributions sont plus élevées que la sienne. On la définit formellement comme suit. Soit une entité i et deux demandes Q et Q' telles que :

- $q'_j = q_j$ pour $j = i$ et pour tout j tel que $x_j(Q, C) < x_i(Q, C)$,
- $q'_j = \beta_j q_j$ avec $\beta_j \geq 1$ pour tout j tel que $x_i(Q, C) \leq x_j(Q, C)$.

On devrait alors avoir $x_i(Q, C) = x_i(Q', C)$.

2.3 Traitement des entités négligeables

Les propriétés de cette sous-section constituent une suite naturelle au principe séquentiel. On pourrait avoir de sérieux doutes sur une règle qui imputerait une part de coûts positive à une entité qui aurait une demande nulle. Une des propriétés énoncées ci-dessous va plus loin, en exigeant que les parts des autres agents soient insensibles à l'élimination d'une entité dont la demande est nulle. Il y a également une part de cohérence dans une telle propriété. Une propriété encore plus forte exige que les contributions des autres agents soient insensibles à l'élimination d'une entité dont l'ajout de la demande à n'importe quel sous-ensemble des autres entités, entraîne toujours un accroissement de coûts égal à son coût de faire cavalier seul, ce qui implique que cet agent paie son coût de faire cavalier seul. Une dernière propriété exige que les contributions des agents soient ordonnées de la même façon que leurs coûts de faire cavalier seul.

Dans les définitions qui suivent, Q_{-i} est le vecteur des demandes Q duquel on a éliminé la composante q_i alors que C_{-i} est la restriction de C au vecteur Q_{-i} et $x^{N\setminus\{i\}}$ celle de la règle x à (Q_{-i}, C_{-i}).

Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN) Si une entité a une demande nulle, les contributions des autres ne devraient pas dépendre de la présence ou non de cette entité dans le problème de partage. Formellement, si $q_i = 0$, alors

$$x_j^{N\setminus\{i\}} (Q_{-i}, C_{-i}) = x_j \left(Q^{N\setminus\{i\}}, C\right) \ \forall j \in N\setminus \{i\}$$

ce qui implique $x_i \left(Q^{N\setminus\{i\}}, C\right) = 0$.

Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN) Une entité i est négligeable pour un problème (Q, C) si $C\left(Q^{S\cup\{i\}}\right) - C\left(Q^S\right) = c_i(q_i)$ pour tout sous-ensemble $S \subset N\setminus\{i\}$. Une entité est négligeable si elle est négligeable quel que soit le problème.

On dit qu'une règle de répartition est insensible à l'élimination d'une entité négligeable si les contributions exigées des autres entités restent les mêmes une fois éliminée l'entité négligeable du problème de répartition des coûts. Cette propriété implique que l'entité négligeable paie exactement son coût de faire cavalier seul. Elle va cependant plus loin en spécifiant que le retrait de cette entité du problème de partage ne doit pas changer les contributions des autres. Elle constitue donc une forme de cohérence. Formellement, si l'entité i est négligeable, on doit avoir

$$x_j^{N\backslash\{i\}}\left(Q_{-i}, C_{-i}\right) = x_j\left(Q, C\right)\ \forall j \in N\backslash\left\{i\right\}$$

ce qui implique $x_i\left(Q, C\right) = c_i\left(q_i\right).$

Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP) Le classement des contributions de deux entités ne doit pas dépendre de la demande des autres entités. Formellement, étant donné deux problèmes (Q, C) et (Q', C) et deux entités i et j tels que $q_i = q_i'$ et $q_j = q_j'$, on doit avoir :

$$x_i\left(Q, C\right) \leq x_j\left(Q, C\right) \Leftrightarrow x_i\left(Q', C\right) \leq x_j\left(Q', C\right)$$

Remarque 2 La propriété (IEN) implique évidemment (IDN). Par contre, dans la mesure où le coût incrémental d'ajouter une entité dont la demande est nulle à d'autres est toujours nul, la propriété (IDN) est plus faible que (IEN). S'il s'agit de comparer les propriétés (IEN) et (INP), aucune n'est plus forte que l'autre.

2.4 Monotonie

On s'attend généralement à ce que les entités paient davantage lorsqu'elles augmentent leurs exigences ou quand les coûts augmentent. La monotonie par rapport aux coûts et la monotonie par rapport à la demande, définies ci-après, traduisent cette préoccupation. Dans certaines circonstances, on peut aussi s'intéresser à la façon dont la contribution d'une entité peut être affectée par le changement de la demande des autres entités. Dans certains cas, elles peuvent augmenter et dans d'autres diminuer. On parle de monotonie croisée positive quand elles augmentent toutes et négative quand elles diminuent toutes. Ces propriétés s'avèrent très fortes dans un contexte général et il faudra souvent se contenter de la monotonie le long d'un rayon.

Monotonie par rapport aux coûts (MCT) Cette propriété veut que, si les coûts devaient s'avérer plus élevés que prévu, quelle que soit l'ampleur du projet ou les niveaux de production à réaliser, alors les parts des coûts imputées aux différentes entités ne devraient pas diminuer. Formellement, étant donné deux problèmes (Q, C) et (Q, C') tels que $C(Q) \leq C'(Q)$, on devrait avoir $x_i(Q, C) \leq x_i(Q, C')$ pour chaque entité i. On peut la voir comme une propriété incitative. Les entités devraient être encouragées à réduire leurs coûts en les faisant bénéficier de ces réductions. Comme on le verra, cette propriété est très forte et est satisfaite par très peu de méthodes. Il existe des formes plus faibles de monotonie par rapport aux coûts sur lesquelles on reviendra en temps et lieu.

Monotonie par rapport à la demande (MD) Cette propriété exige que la contribution demandée à une entité ne décroisse jamais par rapport aux quantités demandées par cette entité. Formellement, si on a deux problèmes (Q, C) et (Q', C) et une entité i tels que $q_i \leq q_i'$ alors que $q_j = q_j'$ pour toute autre entité j, on devrait observer $x_i(Q, C) \leq x_i(Q', C)$.

Dans la mesure où une augmentation de la demande entraîne généralement une augmentation de coût, on peut s'attendre à ce que (MD) soit violée lorsque (MCT) l'est.

Monotonie par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MDR) Cette propriété, conçue pour les demandes multidimensionnelles, exige que la contribution exigée d'une entité ne décroisse jamais lorsque cette entité augmente les quantités qu'elle demande de façon proportionnelle. Formellement, si on a deux problèmes (Q, C) et (Q', C) et une entité i tels que $q_i' = \beta q_i$ avec $\beta > 1$ alors que $q_j = q_j'$ pour toute autre entité j, on devrait observer $x_i(Q, C) \leq x_i(Q', C)$.

Monotonie croisée positive par rapport à la demande (MCP) La monotonie croisée positive dans la demande exige que l'accroissement de la demande d'une entité n'entraîne pas de baisse des contributions exigées des autres entités. Formellement, si on a deux problèmes (Q, C) et (Q', C) et une entité i tels que $q_i \leq q_i'$ alors que $q_j = q_j'$ pour toute autre entité j, on devrait observer $x_j(Q, C) \leq x_j(Q', C)$ pour toutes les entités autres que i.

Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN) Si on a deux problèmes (Q, C) et (Q', C) et une entité i tels que $q_i \leq q'_i$ alors que $q_j = q'_j$ pour toute autre entité j, on devrait observer $x_j(Q, C) \geq x_j(Q', C)$ pour toutes les entités autres que i.

Monotonie croisée (positive MCPR ou négative MCNR) par rapport à des changements proportionnels dans la demande La contribution exigée d'une entité ne doit pas décroître ou croître lorsqu'une autre entité augmente les quantités qu'elle demande de façon proportionnelle.

2.5 Bornes sur les contributions

Au delà des propriétés normatives qui précèdent, une entité sera souvent intéressée à connaître a priori les contributions minimale et maximale qu'on pourra exiger d'elle. Par exemple, si les entités sont libres de participer à un projet commun, chacune d'elle le fera si elle est assurée de ne pas payer plus que son coût de faire cavalier seul, une propriété qu'on appelle la participation. Les entités peuvent exiger davantage dans la mesure où des sous-groupes pourraient toujours choisir de former des alliances pour répondre à leurs besoins. Pour contrer ce type de déviation, on ne devrait pas exiger davantage des membres de toutes les coalitions possibles que le coût auquel ces coalitions pourraient fonctionner seules. Une répartition qui rencontre cette propriété appartient au *coeur* du jeu de coût, tel que défini dans BMT (2002b et d). On sait que le coeur existe en présence d'économies d'échelle.

En cas de déséconomies d'échelle, au moins une entité devra payer davantage que son coût de faire cavalier seul. C'est dire que le coeur n'existe pas. On peut néanmoins forcer les entités à coopérer et à partager les coûts parce qu'un projet commun peut comporter des avantages, esthétiques par exemple, pour l'ensemble de la société. Autant on peut considérer comme équitable que les entités ne paient pas plus que leur coût de faire cavalier seul lorsque c'est possible, autant on devrait exiger que chaque entité paie au moins son coût de faire cavalier seul et que les membres de chaque coalition possible paient ensemble au moins le coût auquel elle pourrait fonctionner seule lorsque cela est possible, comme lorsqu'il y a déséconomies d'échelle. On dira d'une répartition qui rencontre cette propriété qu'elle satisfait le test de l'anti-coeur.

Participation (PA) La participation veut qu'aucune entité ne se voit imputer une part des coûts supérieure à son coût de faire cavalier seul, i.e. $x_i(Q, C) \leq c_i(q_i)$ pour tout i.

Anti-participation (APA) C'est l'inverse de la propriété précédente. Chaque unité paie au moins son coût de faire cavalier seul, i.e. $x_i(Q, C) \geq c_i(q_i)$ pour tout i.

Test du coeur (CO) Une répartition passe le test du coeur lorsque l'imputation qu'elle donne pour n'importe quel sous-ensemble d'entités ne dépasse pas le coût total auquel cette coalition pourrait fonctionner seule dans le cas où il existe des imputations ayant cette propriété. Formellement, $\sum_{i \in S} x_i(Q, C) \leq C\left(Q^S\right)$, pour tout sous-ensemble S de N. On peut écrire cette inégalité sous la forme $\sum_{i \in S} x_i(Q, C) \geq C(Q) - C\left(Q^{N \setminus S}\right)$. Sous cette forme, la propriété veut que chaque coalition se voit imputer un montant au moins aussi élevé que le coût supplémentaire qu'elle impose à la coalition complémentaire $N \setminus S$ lorsqu'elle la rejoint pour former la grande coalition N. Si ce n'était pas le cas, les membres de la coalition $N \setminus S$ verseraient un subside aux membres de la coalition S, d'où une objection possible de leur part. On peut donc voir (CO) comme une condition spécifiant l'absence d'interfinancement ou encore la robustesse à la sécession.

Le test du coeur implique évidemment la participation dans la mesure où on admet les singletons comme coalitions dans le test du coeur.

Test de l'anti-coeur (ACO) Une répartition passe le test de l'anti-coeur lorsque l'imputation qu'elle donne pour n'importe quel sous-ensemble d'entités n'est pas inférieure au coût total auquel cette coalition pourrait fonctionner seule dans le cas où il existe des imputations ayant cette propriété. Formellement, $\sum_{i \in S} x_i(Q, C) \geq C\left(Q^S\right)$, pour tout sous-ensemble S de N, lorsque possible.

Suit une proposition qui relie ces dernières propriétés à la monotonie croisée.

Proposition 1 *Toute règle qui satisfait à la monotonie croisée négative par rapport à des changements proportionnels dans la demande satisfait également au test du coeur. À l'inverse, toute règle qui satisfait à la monotonie croisée positive par rapport à des changements proportionnels dans la demande satisfait au test de l'anti-coeur.*

La premier énoncé a été démontré par Moulin (1986) dans le contexte d'un seul bien privé homogène. Il a été généralisé par Téjédo et Truchon (2002) à l'anticoeur et au contexte plus général. En fait, les versions plus faibles de monotonie croisée que sont (MCNR) et (MCPR) leur suffisent pour établir ces résultats.

Il ne serait pas raisonnable d'exiger les propriétés (PA) et encore moins (CO) dans toutes les circonstances. Tout au plus devrait-on exiger d'une règle qu'elle donne des répartitions qui satisfont (PA) ou (CO) lorsque de telles répartitions existent. Dans le cas de (CO), on dit alors que le coeur existe. On sait que c'est le cas en présence d'économies d'échelle. La satisfaction de (PA), quant à elle, est possible sous l'hypothèse $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$. Le même genre de remarque s'applique à (MCN). Une telle condition a du sens uniquement en présence d'économies d'échelle.

3 Propriétés de cohérence

On peut souhaiter une certaine cohérence de la part d'une règle de partage de coûts, par exemple qu'elle donne les mêmes résultats, peu importe les unités de mesure qui sont utilisées ou peu importe qu'on l'applique séparément à divers éléments de coût ou globalement à l'ensemble des coûts ou encore qu'on l'applique séparément à certaines entités ou à l'ensemble des entités. Les propriétés qui suivent sont de cette nature.

3.1 Insensibilité aux unités de mesure

On a souvent le choix des unités dans lesquelles on va exprimer les caractéristiques des demandes et des projets dont on doit partager les coûts. Par exemple, on peut exprimer la longueur d'une piste d'atterrissage en mètres ou en pieds, la résistance d'un barrage en

Kg par centimètre carré ou en livres par pouce carré, la température minimale à laquelle il devra résister en degrés Celsius ou Fahrenheit. On ne voudrait évidemment pas que la fraction des coûts échéant à chaque entité dépende du choix des unités. En particulier, on voudrait que les répartitions produites par une règle soient insensibles à des transformations linéaires (changements proportionnels) des unités de mesure. S'il s'agit de passer des degrés Celsius à Fahrenheit, on parle alors de transformation affine (changements proportionnels plus ajout ou retrait d'une constante). On peut même aller plus loin et décider de mesurer la demande d'une entité en termes de son coût de faire cavalier seul, comme avec la règle séquentielle radiale. Dans la mesure où ce coût n'est pas proportionnel à la demande, il s'agit là d'une transformation non linéaire des quantités en unités monétaire. L'ordinalité exige qu'une règle ne soit pas affectée par une telle transformation. Elle couvre également le cas des transformations affines.

Insensibilité aux unités de mesure (IU) Une règle de partage de coûts est insensible aux unités de mesure si une transformation linéaire des unités dans lesquelles les quantités et les coûts sont exprimés ne change pas la répartition des coûts. Pour énoncer formellement cette propriété, on définit deux problèmes (Q, C) et (Q', C') comme étant *équivalents* s'il existe un vecteur λ strictement positif, de même dimension que Q, tel que $Q = \lambda \otimes Q' \equiv (\lambda_1 q_1', \ldots, \lambda_m q_m')$ et $C'(Q) = C(\lambda \otimes Q)$. On permet donc que les quantités d'un même bien demandées par deux entités différentes soient transformées par un scalaire différent. L'insensibilité aux unités de mesure exige que, pour deux problèmes (Q, C) et (Q', C') équivalents, on ait $x_i(Q, C) = x_i(Q', C')$ pour tout i.

Ordinalité (O) Une règle de partage de coûts satisfait l'ordinalité si une transformation croissante des unités dans lesquelles les quantités et les coûts sont exprimés ne change pas la répartition des coûts. Ici, on définit deux problèmes (Q, C) et (Q', C') comme étant *ordinalement équivalents* s'il existe une liste $f = (f_1, \ldots, f_n)$ de transformations bijectives, une pour chaque entité, telles que $Q = f(Q') = (f_1(q_1'), \ldots, f_n(q_n'))$ et $C'(Q') = C(f(Q'))$.

L'ordinalité exige que, pour deux problèmes (Q, C) et (Q', C') ordinalement équivalents, on ait $x_i(Q, C) = x_i(Q', C')$ pour tout i.

Ordinalité radiale (OR) Pour l'ordinalité radiale, on impose que chaque fonction f_i qui peut être appliquée à la demande de l'entité i transforme tout rayon de l'espace de ses demandes en un rayon (possiblement le même). Deux problèmes (Q, C) et (Q', C') dont l'un est obtenu par une telle transformation sont dits *radialement équivalents*. L'ordinalité radiale exige que, pour deux problèmes (Q, C) et (Q', C') radialement équivalents, on ait $x_i(Q, C) = x_i(Q', C')$ pour tout i. C'est une propriété plus faible que l'ordinalité dans la mesure où on restreint le type de transformation qu'on peut faire subir à un problème.

Remarque 3 Toutes les règles qui sont définies uniquement en termes des coûts $c_i(q_i)$, $ca_i(Q)$ ou $cm_i(Q)$ satisfont à l'ordinalité (O), dans la mesure où ces coûts sont insensibles au choix des unités pour exprimer les demandes. Par contre, les règles qui font intervenir les quantités ou les dérivées des fonctions de coût violent cette propriété. Certaines de ces dernières satisfont cependant à l'insensibilité aux unités de mesure (IU).

3.2 Propriétés de séparation

On regroupe ici des propriétés qui veulent que, si la fonction de coût peut être séparées selon les entités, il devrait en être de même pour la répartition des coûts ; si les coûts peuvent être décomposés en plusieurs éléments, la règle de partage de coûts devrait donner les mêmes résultats, qu'on l'applique séparément aux divers éléments de coût, comme par exemple les coûts spécifiques et communs, ou globalement à l'ensemble des coûts ; et la règle devrait exiger les mêmes contributions d'un sous-ensemble d'entités si on la lui applique, après avoir prélevé ce qui est dû par les autres entités.

Séparation entre entités (SE) La séparation entre entités exige que, si les coûts sont séparables entre les entités, les parts des coûts imputées aux entités devraient correspondre aux coûts qui leur sont imputables. De façon formelle, si $C(Q) = \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$, on doit avoir $x_i(Q, C) = c_i(q_i)$.

Proportionnalité (PR) Cette propriété veut que, si les coûts sont proportionnels à la demande, il devrait en être de même des contributions. Formellement, s'il existe un vecteur A de même dimension et configuration que Q tel que $C(Q) = A \cdot Q \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{m_i} a_{ih} q_{ih}$, on doit avoir $x_i(Q, C) = a_i \cdot q_i \equiv \sum_{h=1}^{m_i} a_{ih} q_{ih}$ pour tout i.

On voit immédiatement que (SE) implique (PR) dans la mesure où $A \cdot Q$ est une fonction séparable. Il est également à noter que cette définition est plus forte que celle de Moulin et Shenker (1994). En effet, ils posent $a_{ih} = \alpha \geq 0 \ \forall i, h$.

Additivité (AD) L'additivité veut que, si on peut séparer les coûts d'un projet en deux composantes, disons C_1 et C_2, répartir les composantes séparément devrait mener au même résultat que la répartition des coûts totaux. De façon formelle :

$$x_i(Q, C_1 + C_2) = x_i(Q, C_1) + x_i(Q, C_2) \text{ pour tout } i$$

Si cette propriété est vraie pour deux composantes, elle l'est également pour un nombre quelconque de composantes.

Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC) Il s'agit d'un cas particulier de l'additivité. Un problème de partage (Q, C) est décomposable en coûts spécifiques ou directs et coûts communs si on peut écrire :

$$C(Q) = \sum_{i=1}^{n} ca_i(Q) + cc(Q) = \sum_{i=1}^{n} ca_i\left(Q^{\{i\}}\right) + cc(Q)$$

Une méthode de partage de coûts x est insensible à une telle décomposition si :

$$x_i(Q, C) = ca_i(Q) + x_i(Q, cc) \ \forall i$$

Avec une méthode insensible à ce type de décomposition, peu importe qu'on décompose les coûts ou non et peu importe la décomposition, la répartition du coût total sera la même.

Cohérence (CH) Bien que les autres propriétés de cette sous-section soient aussi des propriétés de cohérence, la présente, qui prend plusieurs formes dans la littérature, dit essentiellement que, si une ou plusieurs entités devaient se retirer du problème de partage des coûts, après avoir payé leur contribution selon la règle de partage en vigueur, et que les membres restants devaient satisfaire à toute la demande, la contribution de ces derniers aux coûts résiduels, selon la même règle, ne devrait pas être différente de ce qu'elle aurait été dans le problème de partage original. De façon formelle, étant donné une règle de partage x et un sous-ensemble d'entités $S \subset N$, définissons la fonction de coût résiduel $C^{N\backslash S}$ des autres entités par :[2]

$$C^{N\backslash S}\left(Q_{N\backslash S}\right) = \max\left\{C\left(Q\right) - \sum_{j\in S} x_j(Q, C),\ 0\right\}$$

La cohérence exige :

$$x_i^{N\backslash S}\left(Q_{N\backslash S}, C^{N\backslash S}\right) = x_i(Q, C)\ \forall i \in N\backslash S$$

Cohérence faible (CHF) Étant donné un problème (Q, C) et un sous-ensemble d'entités $S \subset N$ **ayant les plus petites demandes,** i.e. tel que $c_i(q_i) \leq c_j(q_j)$ pour tout $i \in S$ et tout $j \in N\backslash S$, on doit avoir $x_i^{N\backslash S}\left(Q_{N\backslash S}, C^{N\backslash S}\right) = x_i(Q, C)$ pour tout i dans $N\backslash S$. En mots, si un certain nombre d'entités ayant les plus petites demandes, en termes des coûts de faire cavalier seul, devaient quitter le problème après avoir payé leur dû selon la règle de partage en vigueur et qu'on appliquait la même règle pour répartir entre les autres le coût résiduel de la demande totale, leurs contributions seraient les mêmes que dans le problème original.

La proposition qui suit établit la relation entre quelques propriétés d'insensibilité aux décompositions. La démonstration en est donnée à l'annexe B.

Proposition 2 *1. (AD) implique (IDC) ;*

2. (IDC) et (IDN) impliquent (IEN) ;

3. (IEN) implique (SE) ;

4. (PA) de même que (APA) impliquent (SE).

[2] Cette définition est due à Hart et Mas-Colell (1989). Pour une définition plus faible de cohérence, voir BMT (2002d) et l'annexe F.

4 Quelques résultats

Dans la mesure où une entité qui a une demande nulle n'a aucun impact sur les coûts quels qu'ils soient, toutes les règles recensées ici, sauf la répartition égalitaire, satisfont l'Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN). Il s'agit donc d'une propriété très faible.

Dans la suite, certaines propriétés sont satisfaites par certaines règles lorsqu'il y a économies d'échelle. On définit précisément ce qu'on entend par économies et déséconomies d'échelle en annexe. En bref, on dit qu'il y a économies d'échelle si les coûts incrémentaux sont décroissants par rapport à l'ampleur des demandes. Il est à noter que si une règle satisfait à une des propriétés (MCN), (PA) et (CO) quand on a économies d'échelle, elle satisfait à la propriété inverse, i.e. (MCP), (APA) ou (ACO) quand on a déséconomies d'échelle. Pour abréger la présentation, on ne va pas toujours l'énoncer explicitement.

4.1 Propriétés des règles de répartition proportionnelle

On a le résultat général suivant pour les règles de répartition proportionnelle.

Proposition 3 *Toutes les règles qui ont la forme qui suit satisfont à la cohérence (CH) :*

$$x_i = xb_i + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^{n} t_j} \left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j \right)$$

La démonstration est donnée à l'annexe C de même que les démonstrations concernant les propriétés qui sont satisfaites ou non par les différentes règles de répartition proportionnelle.

4.1.1 La règle des coûts moyens

La règle des coûts moyens, qui n'est définie que dans un contexte où les demandes sont unidimensionnelles, satisfait aux propriétés suivantes :

– Préservation des rangs (RG)
– Traitement égalitaire des égaux (TEE)
– Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)

– Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)
– Monotonie par rapport aux coûts (MCT)
– Monotonie par rapport à la demande (MD)
– Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
– Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
– Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
– Additivité (AD)
– Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)
– Proportionnalité (PR)
– Séparation entre entités (SE)
– Cohérence (CH)

Dans les contextes où cette règle peut s'appliquer, (TEE), (S) et (TE) sont équivalentes. Cette règle est la seule à satisfaire à deux sous-ensembles des conditions qui précèdent. Ils sont précisés dans les propositions qui suivent.

Proposition 4 (Moulin et Shenker, 1994) *La règle des coûts moyens est la seule qui satisfait à (PR) et à (MCT).*

En fait, cette règle satisfait à la condition plus forte qu'est (SE). Comme plusieurs autres règles satisfont à (PR), cette proposition implique que ces autres règles ne peuvent satisfaire à la monotonie telle que définie par Moulin et Shenker et encore moins à (MCT). Il y a aussi de fortes chances qu'elles violent également la monotonie par rapport à la demande (MD), dans la mesure où l'augmentation de la demande se traduit souvent en des augmentations de coûts.

Proposition 5 (Moulin et Shenker, 1994) *La règle des coûts moyens est la seule qui satisfait à (A), (CH), (PR) et (TEE).*

4.1.2 La règle égalitaire

La règle qui consiste à répartir les coûts de façon égalitaire entre les entités satisfait aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)
- Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE)
- Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)
- Monotonie par rapport aux coûts (MCT)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée positive par rapport à la demande (MCP)
- Ordinalité (O)
- Additivité (AD)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)
- Cohérence (CH)

Il faut cependant noter que la plupart de ces propriétés sont satisfaites de façon triviale. Elles le sont parce que les contributions exigées de toutes les entités sont toujours égales entre elles. La monotonie croisée négative n'est pas satisfaite parce que l'accroissement de la demande de la part d'une entité entraîne toujours une augmentation de la part des coûts imputées aux autres entités, même quand il y a économies d'échelle.

4.1.3 La méthode des bénéfices résiduels

Cette règle satisfait aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)
- Participation (PA) sous les hypothèses $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \leq c_i(q_i) \ \forall i$
- Anti-participation (APA) sous les hypothèses $C(Q) \geq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \geq c_i(q_i) \ \forall i$
- Séparation entre entités (SE)
- Ordinalité (O)
- Cohérence (CH)

Étant donné $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$, l'hypothèse $cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$ est assez naturelle. S'il en coûte moins cher à se regrouper qu'à fonctionner de façon isolée, le coût incrémental de se joindre aux autres ne devrait pas être plus élevé que le coût de faire cavalier seul. C'est une hypothèse plus faible que la concavité.

Concernant le test du coeur, on a le résultat suivant qui est essentiellement dû à Young (1994).

Proposition 6 *Sous les hypothèses* $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ *et* $cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$*, la règle des bénéfices résiduels donne des répartitions qui satisfont*

$$\left.\begin{array}{c} x_i \leq c_i(q_i) \\ \sum\limits_{j \in N\backslash\{i\}} x_j \leq C\left(Q^{N\backslash\{i\}}\right) \end{array}\right\} \forall i \tag{1}$$

lorsque de telles répartitions existent. En particulier, si $n \leq 3$, *elle donne des répartitions qui satisfont à (CO) lorsque possible.*

On a évidemment la conclusion inverse avec les hypothèses inverses. L'ensemble des répartitions qui satisfont à (1) forme ce qu'on appelle le *semi-coeur*. Ce dernier se confond au coeur pour $n \leq 3$. Le test du coeur n'est cependant pas nécessairement satisfait lorsque $n > 3$. Young (1994) donne un exemple avec cinq entités où (CO) est violé, alors que le coeur existe. Cependant son exemple ne satisfait pas à une des implications des économies d'échelle définies à l'annexe A.

4.1.4 Les méthodes comptables

Les trois méthodes présentées sous le titre de méthodes comptables dans le survol satisfont aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Participation (PA) sous les hypothèses $ca_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$ et $C(Q) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$
- Anti-participation (APA) sous les hypothèses $ca_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$ et $C(Q) \geq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$
- Séparation entre entités (SE), lorsque $C(Q) = \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ implique $c_i(q_i) = ca_i(Q)\ \forall i$ et $cc(Q) = 0$

– Ordinalité (O), dans la mesure où les $ca_i(Q)$ sont insensibles au changement d'unités

– Cohérence (CH)

Pour les méthodes de Louderback et de Balachandran et Ramakrishnan, on a aussi :

– Insensibilité des contributions des contributions aux entités négligeables (IEN) lorsque $C(Q) = c_i(q_i) + C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$ implique $c_i(q_i) = ca_i(Q)$.

– Insensibilité des contributions à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC) quand $C(Q) = \sum_{i=1}^{n} ca_i(Q) + cc(Q)$ implique $cc\left(Q^{\{i\}}\right) = c_i(q_i) - ca_i(Q)\ \ \forall i$

L'hypothèse $C(Q) = \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ implique $c_i(q_i) = ca_i(Q)\ \ \forall i$ et donc $cc(Q) = 0$, sous laquelle (SE) est satisfaite, est naturelle. En effet, si le coût total est la somme des coûts de faire cavalier seul, cela signifie que le bénéfice à la coopération est nul. Dans ce cas, les coûts de faire cavalier seuls deviennent naturellement les coûts attribuables aux entités.

4.1.5 La répartition proportionnelle aux coûts marginaux

Cette méthode satisfait aux propriétés suivantes :

– Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)

– Monotonie par rapport à la demande (MD), s'il y a économies d'échelle

– Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle

– Participation (PA), s'il y a économies d'échelle

– Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle

– Insensibilité aux unités de mesure (IU)

– Proportionnalité (PR)

– Cohérence (CH)

La répartition proportionnelle aux coûts marginaux est une extension de la règle des coûts moyens. Elle devient cette dernière dans le contexte d'un seul bien privé homogène. Elle satisfait également à une condition qui n'a pas été définie plus haut et qu'on appelle l'*indépendance locale (IL)*. Cette condition veut que deux demandes qui ont le même coût marginal se voient imputer les mêmes parts du coût total. On a d'ailleurs le résultat suivant dû à Wang (2002).

Proposition 7 *La répartition proportionnelle aux coûts marginaux est la seule extension de la règle des coûts moyens qui satisfait à (IL) et à (IU).*

4.2 Propriétés des règles inspirées de la théorie des jeux

4.2.1 La tarification à la Aumann-Shapley

Cette méthode de répartition satisfait aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Monotonie par rapport à la demande (MD), s'il y a économies d'échelle
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Séparation entre entités (SE)
- Proportionnalité (PR)
- Insensibilité aux unités de mesure (IU)
- Additivité (AD)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)

En présence d'économies d'échelles, comme cette méthode satisfait à (MCN), elle satisfait forcément à (MD). Autrement, rien ne garantit que (MD) est respectée.

On a vu, dans le survol des méthodes, que la règle Aumann-Shapley est une généralisation de la règle du coût moyen pour les demandes unidimensionnelles et homogènes. En fait, on doit à Friedmann et Moulin (1998) la caractérisation qui suit de cette règle.

Proposition 8 (Friedmann et Moulin, 1998) *La règle Aumann-Shapley est la seule qui satisfait à (IU) et qui soit une généralisation de la règle du coût moyen pour les demandes unidimensionnelles et homogènes.*

Comme la règle satisfait à (SE), elle satisfait forcément à (PR) et, en vertu de la Proposition 4, elle ne peut satisfaire à la condition plus forte (MCT). Cependant, Young (1985a) montre que cette règle satisfait à une forme de monotonie par rapport aux coûts plus faible que (MCT). Dans le contexte général de ce document, elle s'énonce comme suit. Étant donné deux problèmes (Q, C) et (Q, C') et une entité i tels que[3] $\partial_i \hat{C}(\lambda, \ldots, \lambda) \leq \partial_i \hat{C}'(\lambda, \ldots, \lambda)$ $\forall \lambda \in [0, 1]$, alors $x_i(Q, C) \leq x_i(Q, C')$. En mots, si le coût marginal de l'entité i augmente, il doit en aller de même de sa contribution aux coûts.

Young va plus loin. Il montre que la règle Aumann-Shapley est la seule à satisfaire à la condition suivante, qu'il appelle la *monotonie symétrique*. Étant donné deux problèmes (Q, C) et (Q, C') et deux entités i et j tels que $\partial_i \hat{C}(\lambda, \ldots, \lambda) \leq \partial_j \hat{C}'(\lambda, \ldots, \lambda)$ $\forall \lambda \in [0, 1]$ alors $x_i(Q, C) \leq x_j(Q, C')$.

4.2.2 La méthode Shapley-Shubik

Cette méthode de répartition satisfait aux propriétés suivantes :

- Symétrie (S)
- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Monotonie par rapport à la demande (MD)
- Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Séparation entre entités (SE)
- Proportionnalité (PR)
- Ordinalité (O)
- Additivité (AD)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)

[3] La définition de $\hat{C}$ est rappelée à la page 52.

On trouve un certain nombre de caractérisations de cette règle dans la littérature dont les deux suivantes, qui se ressemblent d'ailleurs.

Proposition 9 (Sprumont, 1998) *La règle Shapley-Shubik est la seule qui satisfait à (AD), (IEN), (S) et (O).*

Proposition 10 (Friedmann et Moulin, 1998) *La règle Shapley-Shubik est la seule qui satisfait à (AD), (IEN), (S), (IU) et (MD).*

Notez que ces auteurs utilisent en fait une version plus faible de (IEN) mais cette règle satisfait la version qui a été définie ici. Encore ici, (MCT) n'est pas satisfaite. Cependant, Young (1985b) montre que cette règle satisfait à une forme de monotonie par rapport aux coûts plus faible que (MCT). Elle s'énonce comme suit. Étant donné deux problèmes (Q, C) et (Q, C') et une entité i tels que $C\left(Q^{S\cup\{i\}}\right) - C\left(Q^S\right) \leq C'\left(Q^{S\cup\{i\}}\right) - C'(Q)$ pour tout $S \subset N \backslash \{i\}$, alors $x_i(Q, C) \leq x_i(Q, C')$. Il s'agit d'une version discrète de la condition qu'il a formulée pour la règle Aumann-Shapley. Il montre également que la règle Shapley-Shubik est la seule à satisfaire à cette condition, tout en traitant les entités de façon anonyme.

4.2.3 Le nucléole

Cette méthode de répartition satisfait aux propriétés suivantes :

- Insensibilité des contributions aux entités négligeables (IEN)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
- Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
- Séparation entre entités (SE)
- Proportionnalité (PR)
- Ordinalité (O)
- Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC)

Dans BMT (2002d), on énonce une caractérisation de cette règle, due à Sobolev (1975).

4.3 Propriétés de la répartition séquentielle

On traite séparément la règle séquentielle originale et la règle radiale puisqu'il s'agit de deux règles avec des propriétés différentes. On rappelle que la règle séquentielle originale s'applique uniquement au cas des demandes unidimensionnelles et homogènes.

4.3.1 La règle séquentielle originale

Cette règle satisfait aux propriétés suivantes :

– Préservation des rangs (RG)
– Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE)
– Principe séquentiel (PS)
– Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
– Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)
– Monotonie par rapport à la demande (MD)
– Monotonie croisée négative par rapport à la demande (MCN), s'il y a économies d'échelle
– Participation (PA), s'il y a économies d'échelle
– Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle
– Séparation entre entités (SE)
– Proportionnalité (PR)
– Ordinalité (O)
– Additivité (AD)
– Cohérence faible (CHF)

Par définition, la règle séquentielle est la seule à satisfaire à (TEE) et à (PS). Moulin et Shenker (1992) ajoutent une autre propriété à la liste qui précède, qu'ils appellent la *Gratuité pour les demandes identique de coût nul* (GR). Cette propriété dit que, s'il est possible de fournir une même quantité identique à q_i à toutes les entités à un coût nul, l'entité i ne devrait pas avoir à payer quoi que ce soit et les parts des autres ne devraient pas être affectées par la demande de l'entité i.

$$C\left(\overbrace{q_i,\ldots,q_i}^{n\text{ fois}}\right)=0\Rightarrow x_j^{N\backslash\{i\}}\left(Q_{-i},C_{-i}\right)=x_j\left(Q,C\right)\ \forall j\in N\backslash\left\{i\right\}$$

C'est une propriété qui a du sens dans les contextes où la fonction de coût est symétrique. C'est une autre des caractéristiques de la règle séquentielle obtenue par Moulin et Shenker (1992).

Proposition 11 (Moulin et Shenker) *La règle de répartition séquentielle est la seule qui satisfait à (AD), (RG), (PR) et (GR).*

Dans le cas de déséconomies d'échelle, les entités vont devoir payer au moins leur coût de faire cavalier seul sous la règle séquentielle. Elles peuvent alors se demander s'il y a un majorant à leur contribution. Moulin et Shenker (1992) ont établi le suivant :

$$x_i\leq\frac{c\left(n\,q_i\right)}{n}\ \forall i\in N$$

Autrement dit, une entité est assurée de ne jamais payer plus que la contribution moyenne qui serait exigée d'elle si toutes les autres entités avait la même demande qu'elle. C'est assez équitable comme majorant.

4.3.2 La règle séquentielle radiale

La règle séquentielle radiale satisfait aux propriétés suivantes :

- Préservation des rangs (RG)
- Traitement égalitaire des demandes équivalentes (TE)
- Principe séquentiel radial (PSR)
- Insensibilité des contributions aux demandes nulles (IDN)
- Insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes (INP)
- Monotonie par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MDR)
- Monotonie croisée négative par rapport à des changements proportionnels dans la demande (MCNR)

– Participation (PA), s'il y a économies d'échelle

– Test du coeur (CO), s'il y a économies d'échelle

– Séparation entre entités (SE)

– Proportionnalité (PR)

– Ordinalité (OR)

– Cohérence faible (CHF)

On peut également garantir un majorant aux contributions des entités dans le contexte multidimensionnel. Étant donné une entité i, construisons un vecteur de demande $\tilde{Q}^i$ en changeant proportionnellement les demandes des autres entités de façon à ce que $c_j\left(\tilde{q}_j^i\right) = c_i\left(q_i\right)\ \forall j$. Les demandes des entités pour lesquelles $c_j\left(q_j\right) < c_i\left(q_i\right)$ se trouvent ainsi à être augmentées et celles pour lesquelles $c_j\left(q_j\right) > c_i\left(q_i\right)$ à être diminuées. Téjédo et Truchon (2001) montrent que la règle de répartition séquentielle radiale donne une répartition qui respecte :

$$x_i \leq \frac{C\left(\tilde{Q}^i\right)}{n}\ \forall i \in N$$

Koster, Tijs et Borm (1998) ont démontré la proposition suivante dans le cas des demandes homogènes. Elle demeure vraie dans le contexte plus général retenu ici, comme le montrent Téjédo et Truchon (2000).

Proposition 12 (Koster, Tijs et Borm, 1998) *La règle de répartition séquentielle radiale est la seule qui satisfait à (TE) et à (PSR).*

Dans le cas où chaque entité demande un seul bien qui lui est spécifique, la règle radiale devient la règle axiale et on a alors cette autre caractérisation.

Proposition 13 (Sprumont, 1998) *La règle séquentielle axiale est la seule à satisfaire à (O), (PS), (IDN), (INP) et (S).*

Téjédo et Truchon (2002) montrent qu'il n'existe pas de caractérisation semblable dans le contexte plus général considéré ici. On aura noté qu'on a gagné l'ordinalité avec la règle radiale et donc avec la règle axiale, alors que la règle originale ne satisfait même pas à (IU).

Ce gain est attribuable à l'utilisation des coûts de faire cavalier seul plutôt que les quantités pour classer les demandes et construire les demandes intermédiaires. Par contre, on a perdu l'additivité. En fait, la proposition suivante établit qu'il n'est pas possible de généraliser la répartition séquentielle au contexte multidimensionnel tout en exigeant (IU) et (AD).

Proposition 14 (Kolpin, 1996) *Il n'existe pas de généralisation de la règle de répartition séquentielle qui satisfait à (IU) et à (AD).*

4.4 Tableaux synoptiques

Dans le Tableau 1, on indique quelles méthodes de répartition présentées dans le Survol satisfont à certaines des différentes propriétés qui ont été énoncées plus haut. Un «O» indique que la méthode de la rangée correspondante satisfait à la propriété en question, un «R» qu'elle satisfait à la forme radiale de la propriété, un «Q» qu'elle satisfait à la propriété en présence d'économies d'échelle, et un «N» que la propriété n'est pas satisfaite, i.e. qu'il existe des contextes ou problèmes dans lesquels elle est violée. Dans certains cas, on indique le nom d'une propriété plus faible ou apparentée qui est vérifiée en lieu de la condition proprement dite. LB signifie que la propriété est satisfaite par les méthodes de Louderback et de Balachandran et Ramakrishnan.

La propriété (IDN) n'apparaît pas dans ce tableau parce qu'elle est satisfaite par toutes les méthodes, sauf la répartition égalitaire. D'autres propriétés n'y apparaissent pas non plus parce qu'elles sont apparentées à d'autres qui s'y trouvent.

Le tableau est séparé horizontalement en deux parties. La partie supérieure concerne deux règles qui ne peuvent être utilisées qu'avec des demandes portant sur un bien privé homogène alors que les règles de la partie inférieure peuvent être appliquées à un contexte très général. Le tableau est également séparé verticalement en deux parties. La partie de gauche regroupe les conditions de type équité et la partie de droite celles de type cohérence. La distinction entre les deux est cependant parfois ténue, comme on a pu le voir.

Rappelons les abréviations des propriétés :

RG : préservation des rangs
TEE : traitement égalitaire des égaux
S : symétrie
TE : traitement égalitaire des équivalents
PS : principe séquentiel
PSR : principe séquentiel radial
IDN : insensibilité des contributions aux demandes nulles
IEN : insensibilité des contributions aux entités négligeables
GR : gratuité pour des demandes identiques de coût nul
INP : insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes
MCT : monotonie par rapport aux coûts
MD : monotonie par rapport à la demande
MCN : monotonie croisée négative par rapport à la demande
MCP : monotonie croisée positive par rapport à la demande
PA : participation
APA : anti-participation
CO : test du coeur ou absence d'inter-financement
ACO : test de l'anti-coeur
IU : invariance par rapport aux unités de mesure
O : ordinalité
OR : ordinalité radiale
SE : séparation entre entités
PR : proportionnalité
AD : additivité
IDC : Insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs
CH : cohérence
CHF : cohérence faible

	RG	TE	PS	IEN	INP	MCT	MD	MCN	PA	CO	SE	O	AD	CH
coût moyen	O	O	N	N	O	**O**	O	Q	Q	Q	O	N	O	O
séquentielle originale	O	O	**O**	N	O	N	O	Q	Q	Q	O	N	O	CHF
égalitaire	O	O	N	N	O	O	O	N	N	N	N	O	O	O
bénéfices résiduels	N	N	N	O	N	N	N	N	Q	N	O	O	N	O
méthodes comptables	N	N	N	LB	N	N	N	N	Q	N	O	O	N	O
prop. au coût marginal	N	N	N	N	N	N	Q	Q	Q	Q	PR	IU	N	O
Aumann-Shapley	N	N	N	O	N	N	Q	Q	Q	Q	O	IU	O	N
Shapley-Shubik	N	S	N	**O**	N	N	**O**	**Q**	Q	**Q**	O	O	**O**	N
nucléole	N	N	N	O	N	N	N	N	O	O	O	O	IDC	N
séquentielle radiale	**O**	**O**	**R**	N	**O**	N	**RQ**	**RQ**	Q	**Q**	O	R	N	CHF

Tableau 1 – Les propriétés satisfaites par les méthodes

Généralement, on va rechercher des méthodes qui satisfont à plusieurs propriétés à la fois. Idéalement, on aimerait que le plus grand nombre de ces propriétés voire toutes soient satisfaites. Malheureusement, certaines propriétés peuvent être incompatibles entre elles. Un certain nombre de propositions ont été démontrées dans la littérature économique à ce sujet. D'autres propositions affirment que telle et telle propriété est satisfaite par telle ou telle méthode. D'autres enfin établissent qu'il y a une seule méthode qui satisfait simultanément à un ensemble donné de propriétés. On a énoncé un certain nombre de ces propositions dans ce rapport.

Ainsi, dans le cas des demandes unidimensionnelles et homogènes, il n'y a que la règle des coûts moyens pour satisfaire à la fois aux propriétés d'additivité, de cohérence, de proportionnalité et de traitement égalitaire des équivalents (les égaux dans ce cas-ci). En prime, on obtient la monotonie par rapport aux coûts. En fait, on sait qu'elle est la seule à satisfaire à la fois à la proportionnalité et à la monotonie par rapport aux coûts.

Toujours dans un contexte unidimensionnel, la méthode de répartition séquentielle est la seule à satisfaire à la fois à la préservation des rangs, à la gratuité pour des demandes identiques de coût nul, à la proportionnalité et à l'additivité. Cette dernière méthode satisfait également à la monotonie par rapport à la demande et au principe séquentiel. Elle est en fait caractérisée par ce dernier principe et le traitement égalitaire des égaux.

Dans le cas des demandes multidimensionnelles, la règle séquentielle radiale est la seule à satisfaire à la fois au principe séquentiel radial et au traitement égalitaire des demandes équivalentes. Par contre, il faut oublier l'insensibilité des contributions aux entités négligeables, l'additivité et même l'insensibilité à la décomposition en coûts spécifiques et communs.

Si on veut avoir l'additivité, l'insensibilité des contributions aux entités négligeables, la symétrie, l'invariance par rapport aux unités de mesure et la monotonie par rapport à la demande, c'est vers la règle Shapley-Shubik qu'il faut se tourner. Cette méthode est la seule à satisfaire à toutes ces propriétés à la fois. On peut même retrancher la monotonie par rapport à la demande de cette liste et remplacer l'invariance par rapport aux unités de mesure par l'ordinalité pour obtenir une autre caractérisation de la méthode Shapley-Shubik.

Ces propositions sont résumées dans le Tableau 2. Chaque rangée indique un ensemble de propriétés, marquées d'un «X», que la méthode est la seule à satisfaire simultanément. Le «R» signifie qu'il faut remplacer (PS) par (PSR).

	RG	TE	S	PS	IEN	GR	MCT	MD	PR	IU	O	AD	CH
coût moyen							X		X				
coût moyen		X							X			X	X
séquentielle originale		X		X									
séquentielle originale	X					X			X			X	
Shapley-Shubik			X		X						X	X	
Shapley-Shubik			X		X			X		X		X	
séquentielle radiale		X		R									

Tableau 2 – Caractérisations des méthodes

Par delà ces propriétés, la disponibilité et la qualité des données va conditionner la qualité des répartitions. Ainsi, toutes les règles qui sont basées sur la fonction C nécessitent la connaissance de cette fonction, au moins pour la demande Q et parfois pour toutes les demandes comprises dans l'ensemble défini par $0 \leq y_i \leq q_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Dans le cas de la règle séquentielle, il faut au moins pouvoir calculer le coût des demandes intermédiaires, au nombre de n. Dans le cas de la règle de répartition proportionnelle au coût marginal, il faut connaître le coût marginal de chaque entité au point Q. Pour la règle Aumann-Shapley, il faut connaître ce coût marginal tout au long du segment $[0, Q]$.

Les règles qui font intervenir la fonction $\hat{c}$ nécessitent uniquement la connaissance de cette fonction. Avec la méthode Shapley-Shubik il faut connaître la valeur de cette dernière pour les $2^n - 1$ sous-ensembles possibles d'entités. Ce dernier nombre croît assez rapidement. Il est égal à successivement $3, 7, 15, 31, 63, 127, 255$ lorsque n croit de 2 à 8. Cela ne pose évidemment aucun problème si on connaît la fonction C. Certaines règles de répartition proportionnelle font également intervenir des coûts spécifiques ca_i. La valeur de ces derniers va influencer directement la répartition des coûts.

5 Conclusion : choix d'une méthode

La règle des coûts moyens est d'un usage très répandu dans les contextes unidimensionnels, i.e. lorsque les demandes des entités s'expriment par un seul nombre et que ces demandes peuvent être sommées pour donner la demande globale. Cette popularité s'explique sans doute pas la simplicité de cette règle. Comme on l'a vu, elle peut se justifier également par ses nombreuses propriétés. Elle satisfait en effet à la plupart de celles qui ont été recensées dans ce document.

Une exception notable est le principe séquentiel, qui rend les contributions des plus petites entités indépendantes de l'ampleur des demandes des plus grosses. Pour les situations où l'impact des plus grosses demandes sur les contributions des plus petites entités est une préoccupation importante, la règle de répartition séquentielle est toute indiquée puisqu'elle satisfait au principe séquentiel. En fait, c'est la seule à satisfaire à ce principe en même temps qu'au traitement égalitaire des demandes équivalentes. Elle satisfait également à toutes les autres propriétés de la règle des coûts moyens, à l'exception de la monotonie par rapport aux coûts. De plus, elle peut être étendue à des contextes où les demandes sont hétérogènes ou multidimensionnelles.

C'est là une considération importante. Dans BMT (2002b), on a argué que la description de la plupart des problèmes réels requiert une liste de plusieurs nombres, listes qui de surcroît peuvent être différentes d'une entité à une autre. Une bonne partie de nos travaux a d'ailleurs consisté à étendre certaines méthodes de répartition à ce contexte. La pratique la plus souvent répandue consiste à concevoir des méthodes de répartition proportionnelle pour ces contextes, en utilisant des clefs de répartition de toutes sortes. Malheureusement, le comportement des règles de répartition proportionnelle laisse beaucoup à désirer dans les contextes multidimensionnels. Les méthodes de ce type, même les plus sophistiquées, qui ont été proposées dans la littérature violent bon nombre des propriétés qu'on pourrait juger souhaitables. C'est le cas de la méthode des bénéfices résiduels, de la répartition proportionnelle aux coûts marginaux et des méthodes auxquelles on a donné le nom de *comptable* dans ce document et qui ont été proposées par Moriarity (1975), Louderback (1976) et Balachandran et Ramakrishnan (1981).

Par opposition aux méthodes de répartition proportionnelle, la règle séquentielle radiale conserve la plupart des propriétés de la règle séquentielle originale, bien que parfois sous une forme plus faible, dans les contextes multidimensionnels. La seule perte notable est l'additivité (AD) et l'insensibilité des contributions à la décomposition en coûts spécifiques et communs (IDC). Ces dernières sont intéressantes parce qu'il arrive souvent qu'on souhaite faire la répartition des coûts, composante par composante. Par exemple, on peut vouloir répartir les coûts de capital séparément des frais d'exploitation. L'additivité garantit que, peu importe qu'il y ait décomposition des coûts ou non et peu importe la façon de les décomposer, la répartition totale sera la même. Si on sait que la méthode utilisée satisfait à cette propriété, on conviendra facilement qu'il est inutile de consacrer beaucoup d'énergie à la décomposition des coûts.

Dans le même ordre d'idée, on peut souhaiter imputer directement aux entités les coûts qui leur sont spécifiques et réserver l'utilisation d'une règle de répartition aux coûts qui sont véritablement communs. La distinction entre les deux n'étant pas toujours claire, on peut consacrer beaucoup d'efforts pour arriver à établir une telle distinction, à la satisfaction de toutes les entités. L'intérêt d'une règle qui satisfait à (IDC) est précisément qu'elle dispense de tous ces efforts parce que, en fin de compte, les résultats seront les mêmes, peu importe la décomposition adoptée.

Si les propriétés (AD) et (IDC) s'avèrent importantes, il faut oublier la règle séquentielle radiale pour les contextes multidimensionnels et se tourner plutôt vers les règles issues de la théorie des jeux coopératifs. Parmi ces dernières, celle de Shapley-Shubik est certainement la plus facile à utiliser. Avec cette dernière, on retrouve (AD) et (IDC). On gagne également l'insensibilité des contributions aux entités négligeables mais on doit sacrifier la préservation des rangs, le traitement égalitaire des demandes équivalentes (pour ne conserver que la symétrie), le principe séquentiel et l'insensibilité du classement des contributions aux entités non pertinentes.

Dans ce domaine, comme dans bien d'autres, on ne peut donc tout avoir. Il y a des choix à faire et ces choix impliquent des coûts en termes des propriétés sacrifiées et de données requises. En vertu des résultats établis dans ce document, le choix dans les contextes multi-dimensionnels devrait se faire entre la règle séquentielle radiale et la règle Shapley-Shubik, selon les propriétés privilégiées. Le Tableau 1 se veut un outil pour aider les gestionnaires à faire un choix éclairé.

Annexes

A Économies d'échelle : définition

On dira qu'il y a économies d'échelle si la fonction de coût donne des coûts incrémentaux décroissants. Dans le cas d'une fonction à une seule variable, comme dans le contexte d'un seul bien privé homogène, cela revient à dire que le coût marginal est décroissant ou que la fonction est concave. Pour le cas plus général, on emprunte la définition et les résultats qui suivent à Téjédo et Truchon (2002). La difficulté qui se pose, dans le contexte général adopté dans BMT (2002b) et repris ici, est de comparer des accroissements de demandes de différentes entités. C'est ce qui rend la définition qui suit quelque peu complexe.

Une fonction de coût C donne des *coûts incrémentaux décroissants* si, pour tout triplet de demandes (Y, Y', Z) tel que $Y \leq Y'$ et tout couple (i, j) tel que $c_i(y_i) \geq c_j(y_j)$ et $c_i(y_i + z_i) - c_i(y_i) = c_j(y_j + z_j) - c_j(y_j)$, on a :

$$C\left(Y + Z^{\{i\}}\right) - C(Y) \geq C\left(Y' + Z^{\{j\}}\right) - C(Y') \tag{2}$$

Une fonction de coût qui a cette propriété a également les propriétés suivantes, qui sont plus intuitives :

1. Quel que soit le triplet (Y, Y', Z) tel que $Y \leq Y'$, on a :

$$C(Y + Z) - C(Y) \geq C(Y' + Z) - C(Y') \tag{3}$$

2. Étant donné un vecteur de demandes Z, définissons $I(Z) = \{i \in N : z_i \neq 0\}$ et désignons par $\#I(Z)$ le nombre d'entités dans cet ensemble. Alors, étant donné un triplet (Y, Y', Z) et un $h \in I(Z)$ tels que $Y \leq Y'$, $Y + Z \leq Y' + Z^{\{h\}}$, $c_i(y_i) \geq c_h(y_h)$ et $c_i(y_i + z_i) - c_i(y_i) = c_h(y_h + z_h) - c_h(y_h)$ $\forall i \in I(Z)$, on a :

$$C(Y + Z) - C(Y) \geq \#I(Z)\left(C\left(Y' + Z^{\{h\}}\right) - C(Y')\right) \tag{4}$$

3. Pour tout couple (Y, Y') tel que $Y \leq Y'$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(y'_i) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i) \geq C(Y') - C(Y) \tag{5}$$

4. Étant donné un triplet $(Y, Z, W) \geq 0$ tel que $\|Z\| = \|W\| = 1$, convenons de noter $D_{WZ}^{++}C(Y)$ la dérivée seconde de C, dans la direction W, de la dérivée première dans la direction Z. Alors $D_{WZ}C(Y) \leq 0$.

La première propriété ressemble davantage à ce qu'on a en tête quand on parle de coût incrémental décroissant. L'ajout d'un vecteur Z à une demande a un impact d'autant plus faible sur le coût total que la demande est importante. Elle n'est cependant pas toujours suffisante pour nos besoins. Il faut souvent comparer des accroissements de demandes de différentes entités, qui peuvent porter sur des biens différents. La définition permet cela.

La deuxième propriété dit que, si $Y + Z \leq Y' + Z^{\{h\}}$, l'accroissement moyen du coût pour toutes les entités concernées par Z est au moins aussi élevé que l'accroissement pour l'entité h. La troisième propriété dit que le bénéfice obtenu de la coopération augmente avec l'ampleur de la demande. La dernière propriété est semblable à une propriété des fonctions concave mais elle est plus faible dans la mesure où elle dit quelque chose uniquement à propos des dérivées dans des directions non-négative.

À noter que (3) implique $C\left(Q^S + Q^{\{i\}}\right) - C\left(Q^S\right) \geq C\left(Q^T + Q^{\{i\}}\right) - C\left(Q^T\right)$ pour tout Q dès lors que $S \subset T$ et $i \notin T$. En se rappelant la convention $\hat{c}(S) = C\left(Q^S\right)$, on peut écrire cette dernière relation sous la forme[4] :

$$\forall i \in N,\ \forall S, T \subset N : S \subset T \Rightarrow \hat{c}(S \cup \{i\}) - \hat{c}(S) \geq \hat{c}(T \cup \{i\}) - \hat{c}(T) \tag{6}$$

C'est ainsi qu'on définit la *concavité des jeux de coûts*. Elle est aussi le reflet d'économies d'échelle. Une définition équivalente[5] de la concavité des jeux de coûts est :

$$\forall S, T \subset N : \hat{c}(S) + \hat{c}(T) \geq \hat{c}(S \cup T) + \hat{c}(S \cap T)$$

Elle implique évidemment :

$$\forall S, T \subset N : \hat{c}(S) + \hat{c}(T) \geq \hat{c}(S \cup T) \tag{7}$$

Une fonction $\hat{c}$ qui satisfait cette dernière condition est dite *sous-additive*. C'est une condition qui incorpore une forme réduite d'économies d'échelle. Dans le même ordre d'idée, (5) implique :

$$\forall S, T \subset N : S \subset T \Rightarrow \sum_{i \in T} \hat{c}(\{i\}) - \hat{c}(T) \geq \sum_{i \in S} \hat{c}(\{i\}) - \hat{c}(S) \tag{8}$$

Autrement dit, les bénéfices de la coopération augmentent avec la taille de la coalition.

De manière plus générale, la condition (3) implique, pour deux sous-ensembles quelconques $S, T \subset N$ tels que $S \cap T = \varnothing$ et deux demandes $Q, \tilde{Q}$ telles que $Q \leq \tilde{Q}$:

$$C\left(Q^S + Q^T\right) - C\left(Q^S\right) \geq C\left(\tilde{Q}^S + Q^T\right) - C\left(\tilde{Q}^S\right) \tag{9}$$

[4] On écrit $i \in N$ puisque la relation est satisfaite de façon triviale quand $i \in S$ ou $i \in T$.
[5] Voir BMT (2002c)

En particulier, pour tout $i \in N$ et $Q \leq \tilde{Q}$, on a :

$$C\left(Q^{N\setminus\{i\}} + Q^{\{i\}}\right) - C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right) \geq C\left(\tilde{Q}^{N\setminus\{i\}} + Q^{\{i\}}\right) - C\left(\tilde{Q}^{N\setminus\{i\}}\right)$$

En se rappelant la définition du coût incrémental, $cm_i(Q) = C(Q) - C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$, cette dernière implication peut encore s'écrire :

$$\forall i,\ Q \leq \tilde{Q} \text{ et } q_i = \tilde{q}_i \Rightarrow cm_i(Q) \geq cm_i\left(\tilde{Q}\right) \tag{10}$$

En mots, le coût incrémental d'une entité décroît avec l'importance de la demande des autres. À noter également que, en choisissant $T = \{i\}$ et $S = N\setminus\{i\}$ dans (7) on obtient :

$$c_i(q_i) = \hat{c}(\{i\}) \geq \hat{c}(N) - \hat{c}(N\setminus\{i\}) = cm_i(Q)$$

Dans la suite, si une propriété est violée pour un jeu de coûts satisfaisant à une des conditions (6), (7) ou (8) ou un problème satisfaisant à (9) ou à (10), on sera en mesure d'affirmer que la condition est violée même en présence d'économies d'échelle. On définit les déséconomies d'échelle et ses conséquences en inversant la terminologie et les inégalités dans ce qui précède.

B Démonstration de la Proposition 2

1. **(AD) implique (IDC)** : Supposons qu'on ait

$$C(Q) = \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q) + cc(Q) = \sum_{j=1}^{n} ca_j\left(Q^{\{j\}}\right) + cc(Q)$$

si bien que $x_i\left(Q^{\{i\}}, ca_i\right) = ca_i(Q)$ et $x_i\left(Q^{\{j\}}, ca_i\right) = ca_i\left(Q^{\{j\}}\right) = 0\ \forall j \neq i$. En vertu de (AD), on a alors

$$\begin{aligned} x_i(Q, C) &= \sum_{j=1}^{n} x_i\left(Q^{\{j\}}, ca_j\right) + x_i(Q, cc) \\ &= ca_i(Q) + x_i(Q, cc) \end{aligned}$$

comme l'exige (IDC).

2. **(IDC) et (IDN) impliquent (IEN)** : Si une entité i est négligeable, on a $C(Q) = c_i(q_i) + C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right) = c_i(q_i) + C_{-i}(Q_{-i})$, ce qui peut encore s'écrire $C(Q) = ca_i(Q) +$

$C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$, en posant $ca_i(Q) = c_i(q_i)$, $ca_j(Q) = 0$ et $cc(Q) = C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$. En vertu de (IDC) et (IDN), on a alors

$$x_j(Q,C) = x_j(Q, ca_j) + x_j\left(Q^{N\setminus\{i\}}, C\right) = 0 + x_j\left(Q^{N\setminus\{i\}}, C\right) = x_j^{N\setminus\{i\}}(Q_{-i}, C_{-i}) \ \forall j \neq i$$

comme l'exige (IEN).

3. **(IEN) implique (SE)** : Supposons qu'on ait : $C(Q) = \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$. Pour une entité i quelconque, on a donc $C(Q) = c_i(q_i) + C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$ et, en vertu de (IEN),
$$x_i(Q,C) = c_i(q_i)$$
4. **(PA) implique (SE) :** Supposons qu'on ait : $C(Q) = \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$. En vertu de (PA), on a également $x_i \leq c_i(q_i) \ \forall i$. On a donc forcéement $x_i = c_i(q_i) \ \forall i$. On arrive à la même conclusion sous (APA).

C Démonstrations relatives aux répartitions proportionnelles

Démonstration de la Proposition 3. Il s'agit de montrer que toutes les règles qui ont la forme qui suit satisfont à la cohérence :

$$x_i = xb_i + \frac{t_i}{\sum_{j=1}^{n} t_j}\left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} xb_j\right) \tag{11}$$

Supposons que les entités d'un sous-ensemble S soient éliminées après avoir payé leur dû. On a alors :

$$\begin{aligned}
x_i^{N\setminus S}\left(Q_{N\setminus S}, C^{N\setminus S}\right) &= xb_i + \frac{t_i}{\sum\limits_{j\in N\setminus S} t_j}\left(C^{N\setminus S}\left(Q_{N\setminus S}\right) - \sum_{j\in N\setminus S} xb_j\right) \\
&= xb_i + \frac{t_i}{\sum\limits_{j\in N\setminus S} t_j}\left(C(Q) - \sum_{j\in N\setminus S} xb_j - \sum_{j\in S} xb_j - \frac{\sum\limits_{j\in S} t_j}{\sum\limits_{j\in N} t_j}\left(C(Q) - \sum_{j\in N} xb_j\right)\right) \\
&= xb_i + \frac{t_i}{\sum\limits_{j\in N\setminus S} t_j}\frac{\sum\limits_{j\in N\setminus S} t_j}{\sum\limits_{j\in N} t_j}\left(C(Q) - \sum_{j\in N} xb_j\right) \\
&= xb_i + \frac{t_i}{\sum\limits_{j\in N} t_j}\left(C(Q) - \sum_{j\in N} xb_j\right) \quad \forall i \in N\setminus S
\end{aligned}$$

■

C.1 Règle des coûts moyens

Il est immédiat que la règle des coûts moyens satisfait à (RG), (TEE), (IDN), (INP), (MCT), (MD), (AD) et (PR). En vertu de la Proposition 2, elle satisfait donc également à (IDC), (IEN) et (SE). En vertu de la Proposition 3, elle satisfait à (CH) puisqu'elle est de la forme (11). Dans le contexte unidimensionnel et homogène, (TEE), (S) et (TE) sont équivalents.

Dans le même contexte, économie d'échelle se résume à coût moyen décroissant. Or, si le coût moyen est décroissant, il est clair qu'une augmentation de la demande de la part d'une entité i fait baisser le coût moyen, ce qui entraîne une baisse des contributions des autres entités. Cette règle satisfait donc à (MCN). Elle satisfait également à (CO) et (PA) en vertu de la Proposition 1. On a les résultats inverses en présence de déséconomies d'échelle.

Le principe séquentiel (PS) est l'apanage de la règle séquentielle. Elle est la seule, dans le contexte unidimensionnel et homogène, à satisfaire à la fois à (PS) et à (TEE). Or, comme la règle des coûts moyens satisfait à (TEE), elle ne peut satisfaire à (PS). Finalement, cette règle ne satisfait pas à (O) ni même à (IU) parce que, pour satisfaire à (IU), il faut que les contributions restent inchangées quand on change les unités de mesure de façons différentes d'une entité à l'autre.

C.2 Règle égalitaire

La règle égalitaire satisfait à (RG), (TE) et (INP) de façon triviale, parce que les contributions exigées de toutes les entités sont toujours égales entre elles. Il va de soi que la répartition égalitaire satisfait également à (MCT), (MD), (AD) et (O). Elle satisfait à (CH), parce qu'elle est de la forme (11). En vertu du principe même de la répartition égalitaire, les conditions (PS), (IDN), (IDC), (IEN), (SE) et (PR) ne sont pas respectées.

La règle satisfait à (MCP) parce que l'accroissement de la demande de la part d'une entité entraîne toujours une augmentation de la part des coûts imputées aux autres entités. En revanche, elle ne satisfait pas à (MCN), peu importe la forme de la fonction de coût.

La propriété (PA) et donc (CO) sont également violées. Par exemple, avec la fonction de coût concave de l'exemple 1, on a $c_1(q_1) < \frac{1}{n}C(Q) = x_1$, contrairement à ce qu'exige (PA) et (CO). Il en va de même de (APA) et de (ACO) même avec une fonction de coût convexe, comme dans l'exemple 2. Ici, on a $c_3(q_3) > \frac{1}{n}C(Q) = x_3$, contrairement à ce qu'exige (APA) et (ACO).

$\hat{c}(\{1\}) = 4,$	$\hat{c}(\{2\}) = 5,$	$\hat{c}(\{3\}) = 6,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 9,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 10,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 11,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 15$	

– Exemple 1 –

$\hat{c}(\{1\}) = 4,$	$\hat{c}(\{2\}) = 5,$	$\hat{c}(\{3\}) = 7,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 11,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 12,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 13,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 19$	

– Exemple 2 –

C.3 Méthode des bénéfices résiduels

Rappelons que la méthode des bénéfices résiduels est définie par :

$$x_i = c_i(q_i) - \frac{c_i(q_i) - cm_i(Q)}{\sum_{j=1}^n (c_j(q_j) - cm_j(Q))} \left(\sum_{j=1}^n c_j(q_j) - C(Q) \right) \tag{12}$$

Elle peut également être définie, de façon équivalente, par :

$$x_i = cm_i(Q) + \frac{c_i(q_i) - cm_i(Q)}{\sum_{j=1}^n (c_j(q_i) - cm_j(Q))} \left(C(Q) - \sum_{j=1}^n cm_j(Q) \right) \tag{13}$$

En effet, définissons $g(Q) = \sum_{i=1}^n c_i(q_i) - C(Q)$ et $gm_i(Q) = c_i(q_i) - cm_i(Q)$, d'où $c_i(q_i) = gm_i(Q) + cm_i(Q)$. Avec ces définitions, on peut (12) écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} x_i &= cm_i(Q) + gm_i(Q) - \frac{gm_i(Q)}{\sum_{j=1}^n gm_{j(Q)}} g(Q) \\ &= cm_i(Q) + \frac{gm_i(Q)}{\sum_{j=1}^n gm_j(Q)} \left(\sum_{j=1}^n gm_j(Q) - g(Q) \right) \end{aligned}$$

En remplaçant gm_j et g par leurs définitions, on obtient (13).

(IDN), (IEN), (PA), (APA), (CO), (ACO)

Cette règle satisfait à (IDN) sous l'hypothèse que $q_i = 0$ implique $c_i(q_i) = cm_i(Q) = 0$. La satisfaction de (IEN) est immédiate dans la mesure où $cm_i(Q) = c_i(q_i)$ lorsque i est une entité négligeable. Celle de (PA) l'est également sous les hypothèses $C(Q) \leq \sum_{i=1}^n c_i(q_i)$ et

$cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$ et, inversement, celle de (APA) quand $C(Q) \geq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \geq c_i(q_i)\ \forall i$.

On va maintenant démontrer la **Proposition 6** qui dit que, sous les hypothèses $C(Q) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(q_i)$ et $cm_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$, on a $x_i \leq c_i(q_i)$ et $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \leq C\left(Q^{N \setminus \{i\}}\right)\ \forall i$. Cette proposition établit, entre autres, que (CO) est satisfaite pour $n \leq 3$.

Démonstration. L'affirmation $x_i \leq c_i(q_i)$ est immédiate. Pour ce qui est de la deuxième affirmation, considérons une répartition x^* quelconque qui satisfait $x_i^* \leq c_i(q_i)$ et $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j^* \leq C\left(Q^{N \setminus \{i\}}\right)\ \forall i$. Une telle répartition existe par hypothèse. En combinant $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j^* \leq C\left(Q^{N \setminus \{i\}}\right)$ et $\sum_{j \in N} x_j^* = C(Q)$, on obtient $x_i^* \geq C(Q) - C\left(Q^{N \setminus \{i\}}\right) = cm_i(Q)$. En sommant ces dernières inégalités, on obtient $\sum_{j \in N} x_j^* = C(Q) \geq \sum_{j=1}^{n} cm_j(Q)$. Selon (13), on a donc $x_i \geq cm_i(Q)\ \forall i$ et $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = C(Q) - x_i \leq C(Q) - cm_i(Q) = C\left(Q^{N \setminus \{i\}}\right)$. ■

(RG), (TE), (INP), (PS)

L'exemple 3 montre que cette règle ne satisfait à aucune des propriétés (RG), (TE), (INP), (MCT) et (PS).[6] Avec la première répartition, qui correspond à la fonction $\hat{c}$ telle que spécifiée, on a $x_2 < x_3$ en dépit du fait que $\hat{c}(\{2\}) = \hat{c}(\{3\})$, contrairement à ce qu'exige (TE). Il s'agit d'imaginer que les coûts identiques des entités 2 et 3 soient le résultat de demandes identiques pour obtenir une violation de la condition plus faible (TEE).

Imaginons maintenant que l'entité 3 augmente sa demande, faisant passer $\hat{c}(\{3\})$ à $7, \hat{c}(\{1,3\})$ à $10.5, \hat{c}(\{2,3\})$ à 9 et $\hat{c}(\{1,2,3\})$ à 11. La deuxième répartition résulte de ces augmentations de coûts. La contribution de l'entité 2 est maintenant plus faible que celle de l'entité 1 alors que c'était le contraire avec la demande initiale. Cela représente une violation de (INP). Le même exemple montre que cette méthode ne satisfait pas à (PS) puisqu'une augmentation de la demande de l'entité qui contribuait plus que les autres fait diminuer la contribution des autres. Finalement, cet exemple confirme que cette méthode ne satisfait pas à (RG) puisqu'on a $x_1 > x_2$ alors que $\hat{c}(\{1\}) < \hat{c}(\{2\})$. On le savait déjà de par la violation de (TE).

(MD), (MCN), (MCP), (MCT)

L'exemple 4 montre que la méthode des bénéfices résiduels viole (MD) et (MCN). La première répartition est obtenue avec la fonction de coût originale. Imaginons ensuite qu'une

[6] Typiquement, ces exemples sont constitués d'une fonction de coût, de changements dans ces coûts et des répartitions correspondantes.

$\hat{c}(\{1\}) = 4,$	$\hat{c}(\{2\}) = 5,$	$\hat{c}(\{3\}) = 5,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 8,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 9,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 8,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 10$	

x_1	x_2	x_3	Total
3.11	3.22	3.67	10
3.05	2.85	5.10	11

– Exemple 3 –

augmentation de la demande de l'entité 3 fasse augmenter les coûts totaux de 16 à 17, pour donner la deuxième répartition. L'augmentation de la demande de l'entité 3 fait diminuer sa contribution, contrairement à ce qu'exige (MD). Par le fait même, (MCN) est violée. La diminution de x_3 confirme également la violation de (MCT). On pouvait déjà conclure à cette violation en invoquant la Proposition 4.

$\hat{c}(\{1\}) = 6,$	$\hat{c}(\{2\}) = 7,$	$\hat{c}(\{3\}) = 9,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 12,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 12,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 10,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 16$	

x_1	x_2	x_3	Total
6.00	4.75	5.25	16
7.00	5.00	5.00	17

– Exemple 4 –

La fonction $\hat{c}$ du dernier exemple n'est pas concave. L'exemple 5 montre que (MCN) est violée même avec une fonction $\hat{c}$ concave, qui satisfait à (10) et qui est compatible avec (9). Imaginons qu'une augmentation de la demande de l'entité 3 fasse augmenter $\hat{c}(\{3\})$ et $\hat{c}(\{1,3\})$ de 3\$ et $\hat{c}(2,3)$ et $\hat{c}(\{1,2,3\})$ de 2\$. La contribution de l'entité 1 augmente suite à l'augmentation de la demande de l'entité 3, contrairement à ce que prescrit (MCN). On notera que les répartitions de l'exemple 5 satisfont à (CO), conformément à la Proposition 6.

L'exemple 6, qui part de la même fonction $\hat{c}$ que dans l'exemple 2, illustre la violation de (MCP) avec une fonction $\hat{c}$ convexe, qui satisfait à l'inverse de (10) et qui est compatible avec

$\hat{c}(\{1\}) = 6,$	$\hat{c}(\{2\}) = 7,$	$\hat{c}(\{3\}) = 8,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 9,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 10,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 11,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 12$	

x_1	x_2	x_3	Total
3.00	4.00	5.00	12
3.06	3.47	7.47	14

– Exemple 5 –

l'inverse de (9). Imaginons qu'une augmentation de la demande de l'entité 3 fasse augmenter $\hat{c}(\{3\})$ et $\hat{c}(\{2,3\})$ de 1$ et $\hat{c}(1,3)$ et $\hat{c}(\{1,2,3\})$ de 3$. La contribution de l'entité 2 diminue suite à l'augmentation de la demande de l'entité 3, contrairement à ce que prescrit (MCP).

$\hat{c}$: comme dans l'exemple 2

x_1	x_2	x_3	Total
5.20	6.20	7.60	19
6.22	6.11	9.67	22

– Exemple 6 –

(SE), (O), (CH), (AD), (IDC)

La satisfaction de (SE) et (O) est immédiate. La règle des bénéfices résiduels partage (CH) avec toutes les règles de répartition proportionnelle. Par contre, elle viole (AD). Supposons en effet qu'on ait $C = C^1 + C^2$ avec une décomposition semblable pour tous les éléments de coûts. Pour que (AD) soit respectée, il faudrait que $c_i^1(q_i) - cm_i^1(q_i) = c_i^2(q_i) - cm_i^2(q_i) = c_i(q_i) - cm_i(q_i)\ \forall i$, ce qui ne sera pas toujours le cas. (IDC) n'est pas satisfaite non plus car on ne fait aucun usage des ca_i.

C.4 Méthodes comptables

(IDN), (IEN), (SE), (O), (CH)

Les trois méthodes présentées sous le titre de méthodes comptables dans le survol, et dont on rappelle les formules ci-dessous, satisfont à (IDN) sous l'hypothèse naturelle $q_i = 0$ implique $c_i(q_i) = ca_i(Q) = 0$. La méthode de Louderback et celle de Balachandran et Ramakrishnan satisfont à (IEN) par définition, lorsque $C(Q) = c_i(q_i) + C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$ implique $c_i(q_i) = ca_i(Q)$. Ce n'est cependant pas le cas de la méthode de Moriarity.

Les trois règles satisfont à l'ordinalité (O) dans la mesure où les $ca_i(Q)$ sont insensibles au changement d'unités et elles satisfont à la cohérence (CH) comme toute autre règle proportionnelle.

(RG), (TE), (INP)

Dans la mesure où on peut avoir $c_i(q_i) > c_j(q_j)$ et $ca_i(Q) < ca_j(Q)$, (RG) et (TE) ne tiennent pour aucune des trois méthodes. L'exemple 7 confirme la violation de (RG) et montre que toutes les méthodes comptables violent (INP). Dans cet exemple, on imagine que l'entité 3 augmente sa demande, faisant augmenter $\hat{c}(\{3\})$, $\hat{c}(\{1,3\})$, $\hat{c}(\{2,3\})$ et $\hat{c}(\{1,2,3\})$ de 2 unités, sans changer ca_3. Le deuxième tableau donne les répartitions produites par les trois méthodes avec les deux demandes. Avec les coûts originaux, les trois méthodes donnent $x_1 > x_2$ alors que $\hat{c}(\{1\}) < \hat{c}(\{2\})$.[7] L'augmentation de la demande de l'entité 3 entraîne un renversement de l'importance relative des contributions des deux autres entités, en violation de (INP).

(PA), (APA)

On va commencer par démontrer que, sous l'hypothèse $ca_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$, la règle de **Moriarity** satisfait à (PA) si $C(Q) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ et à (APA) si $C(Q) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$. Cette règle est définie par :

$$x_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j} C(Q)$$

où $w_i = \min\{c_i(q_i),\ ca_i(Q) + cc(Q)\} = \min\left\{c_i(q_i),\ C(Q) - \sum_{j\neq i} ca_j(Q)\right\}$. Soit le sous-ensemble $S \subset N$ tel que $w_i = ca_i(Q) + cc(Q) < c_i(q_i)\ \forall i \in S$ et $w_i = c_i(q_i)\ \forall i \in N\setminus S$.

[7] Ces répartitions resteraient les mêmes si on posait $\hat{c}(\{1\}) = 5 = \hat{c}(\{2\})$, confirmant la violation de (TE). Il s'agirait d'imaginer que les coûts identiques des entités 1 et 2 sont le résultat de demandes identiques pour obtenir une violation de la condition plus faible (TEE).

$\hat{c}(\{1\}) = 4,$	$\hat{c}(\{2\}) = 5,$	$\hat{c}(\{3\}) = 7,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 8,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 9,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 9,$
$ca_1 = 3,$	$ca_2 = 2.9,$	$ca_3 = 4,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 10$	

	x_1	x_2	x_3	Total
Moriarity	3.04	2.94	4.02	10
Moriarity	3.18	3.97	4.85	12
Louderback	3.02	2.93	4.05	10
Louderback	3.26	3.44	5.30	12
Balachandran	3.03	2.93	4.03	10
Balachandran	3.40	3.75	4.85	12

– Exemple 7 –

Si $C(Q) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ et $S = \emptyset$, l'affirmation du théorème est immédiate puisque $x_i = \frac{c_i(q_i)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)} C(Q) \leq c_i(q_i)$. Si $S \neq \emptyset$, il suffit de montrer que $\sum_{j=1}^{n} w_j \geq C(Q)$. Comme $w_i \leq c_i(q_i)$, on obtient alors $x_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j} C(Q) \leq c_i(q_i)$. Par définition,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in S} w_i &= \sum_{i \in S} ca_i(Q) + |S|\ cc(Q) \\
&= |S|\ C(Q) - (|S|-1) \sum_{i \in S} ca_i(Q) - |S| \sum_{i \in N \setminus S} ca_i(Q) \\
\sum_{i \in N \setminus S} w_i &= \sum_{i \in N \setminus S} c_i(q_i) \geq \sum_{i \in N \setminus S} ca_i(Q)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{i \in N} w_i \geq |S|\ C(Q) - (|S|-1) \sum_{i \in N} ca_i(Q) \geq |S|\ C(Q) - (|S|-1)\, C(Q) = C(Q)$$

Montrons maintenant que, si $C(Q) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$, on a $S = \emptyset$, d'où $x_i = \frac{c_i(q_i)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)} C(Q) \geq c_i(q_i)$. Considérons un autre problème où $ca_i(Q)$ est changé pour $ca_i'(Q) = c_i(q_i)\ \forall i$ et où donc $cc'(Q) = C(Q) - \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$. On a alors $w_i = c_i(q_i)\ \forall i$. Réduisons ensuite $ca_1'(Q)$ jusqu'à $ca_1(Q)$. Le coût commun $cc'(Q)$ est alors augmenté de $ca_1'(Q) - ca_1(Q)$, ce qui laisse w_1 inchangé. Les autres w_j demeurent aussi les mêmes puisque, si $cc'(Q)$ est effectivement augmenté, il en va de même des $ca_j'(Q) + cc'(Q)$. En répétant le même argument avec les autres $ca_i'(Q)$, on obtient $w_i = c_i(q_i)\ \forall i$, d'où $S = \emptyset$. ■

On montre maintenant que la règle de **Louderback** satisfait à (PA) si $C(Q) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ et à (APA) si $C(Q) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$. Cette règle est définie par

$$x_i = ca_i(Q) + \frac{c_i(q_i) - ca_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n} (c_j(q_j) - ca_j(Q))} cc(Q) \tag{14}$$

sous l'hypothèse $ca_i(Q) \leq c_i(q_i)\ \forall i$. En développant l'équation (14) et en utilisant la définition de $cc(Q)$, on obtient

$$\begin{aligned}
x_i &= \frac{ca_i(Q) \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) + c_i(q_i) C(Q) - c_i(q_i) \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q) - ca_i(Q) C(Q)}{\sum_{j=1}^{n} (c_j(q_j) - ca_j(Q))} \\
&= \frac{c_i(q_i) \left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q)\right) + ca_i(Q) \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q)\right)}{\sum_{j=1}^{n} (c_j(q_j) - ca_j(Q))} \\
&\lesseqqgtr \frac{c_i(q_i) \left(C(Q) - \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q)\right) + c_i(q_i) \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q)\right)}{\sum_{j=1}^{n} (c_j(q_j) - ca_j(Q))} \\
&= \frac{c_i(q_i) \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q)\right)}{\sum_{j=1}^{n} (c_j(q_j) - ca_j(Q))} = c_i(q_i)
\end{aligned}$$

selon que $\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q) \gtreqqless 0$. ■

On se tourne maintenant vers la règle de **Balachandran et Ramakrishnan.** Une façon de la définir est de remplacer $c_i(q_i)$ dans (14) par $c_i'(q_i) = \min\{c_i(q_i), ca_i(Q) + cc(Q)\}$. Selon la dernière démonstration, on a alors $x_i \leq c_i'(q_i) \leq c_i(q_i)$ quand $\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q) \geq 0$. Pour le cas où $\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - C(Q) \leq 0$, remplaçons $ca_i(Q)$ dans (14) par $ca_i'(Q) = \max\{c_i(q_i) - cc(Q), ca_i(Q)\}$ et désignons par x_i' la part des coûts qui revient à i avec cette définition. On alors $x_i' \geq c_i(q_i)$. En utilisant cette dernière relation de même que $ca_i'(Q) \leq c_i(q_i) - cc(Q)$, $ca_i(Q) \leq c_i(q_i)$ et $C(Q) - \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) \geq 0$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
x_i &= x_i' + ca_i(Q) - ca_i'(Q) \\
&\geq x_i' + ca_i(Q) - c_i(q_i) + cc(Q) \\
&= x_i' - c_i(q_i) + ca_i(Q) + C(Q) - \sum_{j=1}^{n} ca_j(Q) \\
&\geq C(Q) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} ca_j(Q) \geq C(Q) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} c_j(q_j) \geq c_i(q_i)
\end{aligned}
$$

C'est ce qu'exige (APA). ■

(PS), (MCT), (MD), (MCN), (MCP), (CO), (ACO)

L'exemple 8 montre que la règle de Moriarity viole (PS), (MCT), (MD), (MCN) et (CO). Imaginons qu'une augmentation de la demande de l'entité 3 fasse augmenter le coût total de 10 à 11. L'augmentation de la demande de l'entité 3 fait diminuer sa contribution aux coûts et, comme conséquence, elle fait augmenter celles des deux autres entités. Il s'agit donc à la fois d'une violation de (PS), (MCT) et (MD). Si on attribue la hausse de coûts à l'entité 2 plutôt qu'à 3, (MCN) et (MCP) se trouvent violées toutes les deux puisque la contribution de l'entité 1 augmente et celle de 3 baisse suite à la hausse de la demande de 2. De même (CO) et (ACO) sont toutes les deux violées puisque, avec $\hat{c}(\{1,2,3\}) = 10$ ou 11, on a $x_2 + x_3 > 9 = \hat{c}(\{2,3\})$ et $x_1 + x_2 < 8 = \hat{c}(\{1,2\})$. Dans les deux cas, la fonction $\hat{c}$ est concave. Les propriétés (CO) et (MCN) auraient donc été souhaitables et possibles. Par contre, il est moins défendable d'exiger (ACO) et (MCP) dans ce cas. L'exemple 11, donné à la fin de cette sous-section, démontre la violation de ces deux propriétés avec $\hat{c}$ convexe.

L'exemple 9 montre que les règles de Louderback et de Balachandran-Ramakrishnan violent, elles aussi, (PS), (MCT), (MD), (MCN) et (CO). Ici, une augmentation de la demande de l'entité 3 fait augmenter ca_3 et le coût total de 1\$. Cette augmentation de la demande de l'entité 3 et du coût total fait diminuer sa contribution aux coûts et augmenter celles des autres entités, ce qui constitue une violation de (MCT), (MD) et (PS).

Dans l'exemple 9, on a également une violation de (PA) et donc de (CO), ce qui n'est guère surprenant vu que $\hat{c}(\{N\}) > \sum_{j=1}^{n} \hat{c}(\{j\})$ et que $\hat{c}$ n'est pas sous-additive. L'exemple 10, où on utilise les mêmes données que dans l'exemple 8, où $\hat{c}(\{N\}) < \sum_{j=1}^{n} \hat{c}(\{j\})$ et $\hat{c}$ est concave, est plus probant à cet égard. Les deux règles donnent $x_2 + x_3 > 9 = \hat{c}(\{2,3\})$ et $x_1 + x_2 < 8 = \hat{c}(\{1,2\})$. Donc, (CO) et (ACO) sont toutes les deux violées. Selon la Proposition 1, (MCN) est également violée.

$\hat{c}(\{1\}) = 4,$	$\hat{c}(\{2\}) = 5,$	$\hat{c}(\{3\}) = 7,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 8,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 9,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 9,$
$ca_1 = 0,$	$ca_2 = 3,$	$ca_3 = 6,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 10$	

x_1	x_2	x_3	Total
0.83	3.33	5.83	10
1.57	3.93	5.50	11

– Exemple 8 –

$\hat{c}(\{1\}) = 4,$	$\hat{c}(\{2\}) = 5,$	$\hat{c}(\{3\}) = 7,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 8,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 9,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 9,$
$ca_1 = 3,$	$ca_2 = 4,$	$ca_3 = 6,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 17$	

x_1	x_2	x_3	Total
4.33	5.33	7.33	17
5	6	7	18

– Exemple 9 –

Tout comme il est déraisonnable d'exiger (CO) quand $\hat{c}(\{N\}) > \sum_{j=1}^{n} \hat{c}(\{j\})$ et que $\hat{c}$ n'est pas sous-additive, il est tout autant déraisonnable d'exiger (ACO) quand $\hat{c}(\{N\}) < \sum_{j=1}^{n} \hat{c}(\{j\})$ et que $\hat{c}$ est concave, comme dans l'exemple 8. L'exemple 11, qui utilise la même fonction $\hat{c}$ que l'exemple 2, montre que (ACO) est violée par toutes les règles comptables avec $\hat{c}(\{N\}) > \sum_{j=1}^{n} \hat{c}(\{j\})$ et $\hat{c}$ convexe. Avec la règle de Moriarity, on a $x_1 + x_2 < 11 = \hat{c}(\{1,2\})$ et, avec les règles de Louderback et de Balachandran-Ramakrishnan, $x_1 + x_3 < 12 = \hat{c}(\{1,3\})$, contrairement à ce qu'exige (ACO). Selon la Proposition 1, (MCP) est également violée par ces règles. On a cependant (APA) avec les trois règles, conformément au résultat établi plus haut.

$\hat{c}$: comme dans l'exemple 8

	x_1	x_2	x_3	Total
Louderback	0.57	3.29	6.14	10
Balachandran	0.33	3.33	6.33	10

– Exemple 10 –

$\hat{c}(\{1\}) = 4,$	$\hat{c}(\{2\}) = 5,$	$\hat{c}(\{3\}) = 7,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 11,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 12,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 13,$
$ca_1 = 4,$	$ca_2 = 0,$	$ca_3 = 7,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 19$	

	x_1	x_2	x_3	Total
Moriarity	4.75	5.94	8.31	19
Louderback	4.00	8.00	7.00	19
Balachandran	4.00	8.00	7.00	19

– Exemple 11 –

(AD), (IDC)

L'additivité (AD) n'est pas satisfaite. Supposons en effet qu'on ait $C = C^1 + C^2$ et une décomposition semblable pour tous les éléments de coût et les t_i. Pour que (AD) soit respectée, il faudrait que $t_i^1 = t_i^2$ et en particulier $c_i^1(q_i) - ca_i^1(Q) = c_i^2(q_i) - ca_i^2(Q) = c_i(q_i) - ca_i(Q)\ \forall i$, ce qui ne sera pas toujours le cas.

Montrons maintenant que la règle de Louderback et celle de Balachandran et Ramakrishnan satisfont à (IDC) quand $C(Q) = \sum_{i=1}^n ca_i(Q) + cc(Q)$ implique $cc\left(Q^{\{i\}}\right) = c_i(q_i) - ca_i(Q)\ \forall i$. Supposons qu'on ait $C(Q) = \sum_{i=1}^n ca_i(Q) + cc(Q)$. De façon plus rigoureuse, écrivons $C(Q) = \sum_{i=1}^n ca_i(Q,C) + cc(Q,C)$. Admettons, assez naturellement, que $ca_i(Q,cc) = 0$ et $cc(Q,cc) = cc(Q,C)$. Autrement dit, il ne reste plus de coûts attribuables directement aux entités dans $cc(Q,C)$. Définissons $c_i(q_i,cc) = cc\left(Q^{\{i\}},C\right) = c_i(q_i) - ca_i(Q,C)$ et $w_i(Q,cc) = \min\{c_i(q_i,cc),\ ca_i(Q,cc) + cc(q)\} = \min\{c_i(q_i) - ca_i(Q,C),\ cc(q)\}$. Notons que $w_i(Q,cc) = w_i(Q,C) - ca_i(Q,C)$.

Appliquée au problème (Q, cc), la règle de Louderback donne

$$\begin{aligned} x_i(Q,cc) &= ca_i(Q,cc) + \frac{c_i(q_i,cc) - ca_i(Q,cc)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j,cc) - ca_j(Q,cc)} cc(Q,C) \\ &= \frac{c_i(q_i) - ca_i(Q,C)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - ca_j(Q,C)} cc(Q,C) \end{aligned}$$

d'où

$$x_i(Q,C) = ca_i(Q,C) + x_i(Q,cc)$$

comme l'exige (IDC).

Avec la règle de Balachandran et Ramakrishnan, on a

$$\begin{aligned} x_i(Q,cc) &= ca_i(Q,cc) + \frac{w_i(Q,cc) - ca_i(Q,cc)}{\sum_{j=1}^{n} w_j(Q,cc) - ca_j(Q,cc)} cc(Q,C) \\ &= \frac{w_i(Q,C) - ca_i(Q,C)}{\sum_{j=1}^{n} w_j(Q,C) - ca_j(Q,C)} cc(Q,C) \end{aligned}$$

d'où

$$x_i(Q,C) = ca_i(Q,C) + x_i(Q,cc)$$

comme l'exige (IDC).

Supposons maintenant un problème pour lequel $c_i(q_i) \leq ca_i(Q) + cc(Q)\ \forall i$. Avec la règle de Moriarity, on aurait

$$x_i(Q,C) = \frac{c_i(q_i)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)} C(Q)$$

et

$$x_i(Q,cc) = \frac{c_i(q_i) - ca_i(Q)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) - ca_j(Q,C)} cc(Q,C)$$

On est donc loin d'avoir $\frac{c_i(q_i)}{\sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)} C(Q) = ca_i(Q) + x_i(Q,cc)$ comme l'exige (IDC).

C.5 Répartition proportionnelle aux coûts marginaux

Rappelons que cette règle est définie par :

$$x_i(Q,C) = \frac{\partial_i C(Q)\, q_i}{\sum_{j=1}^{n} \partial_j C(Q)\, q_j} C(Q)$$

où $\partial_i C(Q)\, q_i$ est le produit scalaire entre le vecteur des dérivées $\partial_i C(Q)$ et celui des quantités q_i.

(RG), (TE), (PS), (INP), (IEN), (IDN), (IDC), (AD)

Dans la mesure où une entité avec une faible demande peut avoir un coût marginal élevé au point Q et inversement, les conditions (RG), (TEE) et (PS) ne sont pas satisfaites. Un changement dans la demande de certaines unités peut entraîner un renversement important dans les coûts marginaux des autres et inverser l'importance relative des contributions de deux entités. (INP) ne tient donc pas. L'exemple 12 confirme ces affirmations. Avec $Q = (3, 3, 8)$, on a $x_1 > x_2$ en dépit du fait que $q_1 = q_2$. Il s'agit d'une violation de (TEE) et donc de (S), (TE) et (RG). Un accroissement de q_1 à 4 amène une augmentation de x_2, en violation de (PS). Finalement, avec $q_1 = 0$, on obtient une inversion de l'ordre entre les contributions des entités 2 et 3, ce qui constitue une violation de (INP).

$$C : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R} : C(Q) = q_1 + q_2 + q_1^2 q_2^{\frac{1}{2}} + q_3$$

Q	x_1	x_2	x_3	Total
$(3, 3, 8)$	19.09	6.03	4.47	29.59
$(4, 3, 8)$	30.12	8.54	4.05	42.71
$(0, 3, 8)$	0	3	8	11

– Exemple 12 –

L'exemple 12 montre également que (CHF) et donc (CH) ne sont pas satisfaites par cette méthode. Imaginons en effet que l'entité 2 se retire après avoir payé son dû, i.e. 6.03. Une application de la même règle aux deux autres entités et à la fonction de coût résiduel donne $x_1 = 19.09$ et $x_3 = 4.47$. L'exemple montre également que (IEN) est violée. L'entité 3 est en effet négligeable et, avec $Q = (3, 3, 8)$, on a $x_1 \neq 8 = c_3(8)$. Il est évident que (IDN) est satisfaite. En vertu de la Proposition 2, on doit donc conclure que (IDC) et (AD) ne le sont pas.

(CH), (IU), (O)

La répartition proportionnelle aux coûts marginaux satisfait à (CH) comme toute règle de répartition proportionnelle. Elle est insensible au choix des unités de mesure (IU). En effet, supposons qu'on ait deux problèmes équivalents (Q, C) et (Q', C') avec $Q = \lambda \otimes Q' \equiv (\lambda_1 q'_1, \ldots, \lambda_m q'_m)$ et $C'(Q) = C(\lambda \otimes Q)$. En particulier, $C'(Q') = C'\big(\lambda^{-1} \otimes Q\big) = C(Q)$ où

$\lambda^{-1} = \left(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_m^{-1}\right)$. En désignant par λ_{ih} la composante de λ qui s'applique à la demande pour le bien h de la part de l'entité i, on a donc

$$\frac{\partial C'(Q')}{\partial q'_{ih}} = \frac{\partial C'\left(\lambda^{-1} \otimes Q\right)}{\partial q_{ih}} \lambda_{ih}^{-1} = \frac{\partial_i C\left(Q\right)}{\partial q_{ih}}$$

d'où :

$$\partial_i C'(Q')\, q'_i \equiv \sum_{h=1}^{m_i} \frac{\partial C'(Q')}{\partial q'_{ih}} q'_{ih} = \sum_{h=1}^{m_i} \frac{\partial C'\left(\lambda^{-1} \otimes Q\right)}{\partial q_{ih}} \lambda_{ih}^{-1} q_{ih} = \sum_{h=1}^{m_i} \frac{\partial_i C\left(Q\right)}{\partial q_{ih}} q_{ih} \equiv \partial_i C\left(Q\right) q_i$$

L'égalité qui vient d'être établie entre $\partial_i C'(Q')\, q'_i$ et $\partial_i C\left(Q\right) q_i$ dépend de façon cruciale de la linéarité de la fonction $\lambda^{-1} \otimes Q$. La condition plus forte d'ordinalité (O) ne tient pas.

(PR), (SE)

Si $C\left(Q\right) = A \cdot Q \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{m_i} a_{ih} q_{ih}$, on a $\partial_i C\left(Q\right) q_i = \sum_{h=1}^{m_i} a_{ih} q_{ih}\, \forall i$, d'où $x_i(Q, C) = \sum_{h=1}^{m_i} a_{ih} q_{ih}$, comme le veut la proportionnalité (PR). Par contre, on n'a pas la séparation entre entités (SE) à moins que C ne soit linéaire. Supposons qu'on ait $C\left(Q\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j)$ et que C ne soit pas linéaire. Il s'ensuit que $\partial_i C\left(Q\right) = \partial_i c_i\left(q_i\right)$, d'où :

$$x_i(Q, C) = \frac{\partial_i c_i\left(q_i\right) q_i}{\sum_{j=1}^{n} \partial_j c_j\left(q_j\right) q_j} \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) \neq c_i\left(q_i\right)$$

Cela confirme qu'on n'a pas (IEN).

(MCN), (PA), (CO), (MCP), (APA), (ACO), (MD), (MCT)

En présence d'économies d'échelle, l'augmentation d'un q_j avec $j \neq i$ entraîne une baisse de $\partial_i C\left(Q\right)$ et donc de x_i. La répartition proportionnelle aux coûts marginaux satisfait donc à (MCN), (CO) et (PA). Par le fait même, on a également (MD). On a l'inverse, i.e. (MCP), (APA), (ACO), en présence de déséconomies d'échelle. On n'a cependant pas (MD) dans ces circonstances. En fait, cette méthode ne satisfait pas à (MD) de façon générale comme le montre l'exemple 13.[8] En effet, une augmentation de q_1 amène une baisse de x_1.

Définissons maintenant une nouvelle fonction $\tilde{C} : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ à partir de la dernière fonction C en posant $\tilde{C}\left(q_1, q_2\right) = C\left(q_1 + 0.1,\; q_2\right)$. Comme C est une fonction croissante, on a

[8] Compte tenu de sa définition en deux parties, la fonction de cet exemple est toujours croissante et positive. Seule la première partie est utilisée dans les calculs.

$$C:\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} : C(Q) = \begin{cases} q_1^2 q_2 - q_1^3 + q_2 & \text{si} \quad 2q_2 > 3q_1 \\ \frac{1}{2} q_1^3 + q_2 & \text{si} \quad q_2 \leq q_1 \end{cases}$$

Q	x_1	x_2	Total
$(1,2)$	0.60	2.40	3.00
$(1.3\,,2)$	0.10	3.09	3.19

– Exemple 13 –

$\tilde{C}(Q) \geq C(Q) \;\; \forall Q \geq 0$. Si on applique la répartition proportionnelle aux coûts marginaux à cette fonction $\tilde{C}$ et à $Q = (1,2)$, on obtient la répartition :

x_1	x_2	Total
0.46	2.63	3.09

Une augmentation des coûts entraîne une baisse de x_1, contrairement à ce qu'exige (MCT).

D Démonstrations relatives aux règles inspirées de la théorie des jeux

D.1 Tarification à la Aumann-Shapley

Rappelons que cette méthode est définie par

$$x_i(Q,C) = \int_0^1 q_i \, \partial_i C(\lambda Q) \, d\lambda$$

où $q_i \, \partial_i C$ doit être interprété comme un produit scalaire dans le contexte général. De façon équivalente, si on définit la fonction $\hat{C} : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ par $\hat{C}(\tau; Q, C) = C(\tau Q) = C(\tau_1 q_1, \ldots, \tau_n q_n)$, la méthode est définie par :

$$x_i(Q,C) = \int_0^1 \partial_i \hat{C}(\lambda, \ldots, \lambda) \, d\lambda$$

(IDN), (IEN), (AD), (IDC), (SE)

Avec cette méthode, les contributions sont insensibles à l'élimination des demandes nulles (IDN). En effet, si une entité i a une demande nulle, on a $C(Q) = C\left(Q^{N\setminus\{i\}}\right)$, d'où, comme l'exige (IDN),

$$\forall j \in N\setminus\{i\} : x_j(Q,C) = \int_0^1 q_j\, \partial_j C(\lambda Q)\, d\lambda = \int_0^1 q_j\, \partial_j C\left(\lambda Q^{N\setminus\{i\}}\right) d\lambda = x_j^{N\setminus\{i\}}(Q_{-i}, C_{-i})$$

Cette règle satisfait à (AD) dans la mesure où $C = C^1 + C^2$ implique $\partial_i C = \partial_i C^1 + \partial_i C^2$. En invoquant la Proposition 2, on conclut qu'elle satisfait également à (IDC), (IEN) et (SE).

(IU), (O)

Sprumont (1998) donne un exemple qui montre que cette méthode ne satisfait pas à l'ordinalité. Par contre, elle satisfait à (IU). Pour le vérifier et en même temps comprendre pourquoi elle ne satisfait pas à (O), considérons deux problèmes équivalents (Q,C) et (Q',C') Soit la liste $f = (f_1,\ldots,f_n)$ des transformations bijectives (linéaires ici) telles que $Q = f(Q') = (f_1(q_1'),\ldots,f_n(q_n'))$. Rappelons que C' est alors définie par $C'(Q') = C(f(Q'))$. Il s'agit de montrer que $\hat{C}(\,\cdot\,;Q,C) = \hat{C}(\,\cdot\,;Q',C')$. et plus précisément que $\hat{C}(\tau;Q',C') = C'(\tau Q') = C'(\tau f^{-1}(Q)) = C(f(\tau f^{-1}(Q))) = C(\tau Q) = \hat{C}(\tau;Q,C)$. C'est la linéarité de f qui donne $f(\tau f^{-1}(Q)) = Q$. En l'absence de cette dernière, on n'est pas assuré que $\hat{C}(\,\cdot\,;Q,C) = \hat{C}(\,\cdot\,;Q',C')$ et donc que les contributions exigées des entités sont invariantes à des changements non linéaire d'unités.

(RG), (TE), (PS), (INP), (CHF)

Dans la mesure où les coûts marginaux peuvent être ordonnés différemment des coûts de faire cavalier seul, cette méthode ne satisfait ni à (TE) ni à (RG). Des changements dans la demande des entités qui paient davantage peuvent influencer les coûts marginaux des autres, invalidant ainsi (PS). L'exemple 14, basé sur la même fonction de coût et les mêmes demandes que dans l'exemple 12, le confirme. On a $x_1 > x_2$ en dépit du fait que $q_1 = q_2$. Il s'agit d'une violation de (TEE) et donc de (S), (TE) et (RG). Un accroissement de q_1 à 4 amène une augmentation de x_2, en violation de (PS). Finalement, avec $q_1 = 0$, on obtient l'inversion de l'ordre entre les contributions des entités 2 et 3, ce qui constitue une violation de (INP).

Le même exemple montre que (CHF) et donc (CH) ne sont pas satisfaites par cette méthode. Imaginons en effet que l'entité 2 se retire après avoir payé son dû, i.e. 6.12. Une

$$C : \mathbb{R}^3_+ \rightarrow \mathbb{R} : C(Q) = q_1 + q_2 + q_1^2 q_2^{\frac{1}{2}} + q_3$$

Q	x_1	x_2	x_3	Total
$(3,3,8)$	15.47	6.12	8.00	29.59
$(4,3,8)$	26.17	8.54	8.00	42.71
$(0,3,8)$	0	3	8	11

– Exemple 14 –

application de la méthode Aumann-Shapley aux deux autres entités et à la fonction de coût résiduel[9] donne $x_1 = 17.20$ et $x_3 = 6.26$.

(MCN), (PA), (CO), (MCP), (APA), (ACO), (MD), (MCT)

En présence d'économies d'échelle, l'augmentation d'un q_j avec $j \neq i$ entraîne une baisse de $\partial_i C(\lambda Q)$ et donc de x_i. La méthode Aumann-Shapley satisfait donc à (MCN), (CO) et (PA). Par le fait même, on a également (MD). On a l'inverse, i.e. (MCP), (APA), (ACO), en présence de déséconomies d'échelle. On n'a cependant pas (MD) dans ces circonstances. En fait, cette méthode ne satisfait pas à (MD) de façon générale comme le montre l'exemple 15. Un augmentation de q_1 entraîne une diminution de x_1.

C : comme dans l'exemple 13

Q	x_1	x_2	Total
$(1,2)$	0.33	2.67	3.00
$(1.3\,,2)$	0.06	3.13	3.19

– Exemple 15 –

En utilisant à nouveau la fonction $\tilde{C} : \mathbb{R}^2_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{C}(q_1, q_2) = C(q_1 + 0.1,\ q_2)$ et $Q = (1,2)$, on obtient la répartition :

x_1	x_2	Total
0.24	2.85	3.09

[9] À noter que $\hat{C}_{-2}(\lambda,\lambda) \geq 0$ si et seulement si $\lambda \geq 0.217$. On a donc $\partial_1 \hat{C}_{-2}(\lambda,\lambda) = \partial_3 \hat{C}_{-2}(\lambda,\lambda) = 0$ pour $\lambda < 0.217$.

Une augmentation des coûts entraîne une baisse de x_1 contrairement à ce qu'exige (MCT). Cette diminution s'explique par la diminution de $\partial_i C(\lambda Q)$ pour tout $\lambda \in [0,1]$. De ce fait, la diminution de x_1 est en accord avec la condition plus faible de Young (1985a). Même si le coût total a augmenté, l'entité 1 a droit à une réduction de sa contribution aux coûts totaux parce que son coût marginal a diminué.

D.2 Méthode Shapley-Shubik

Rappelons que cette méthode est définie par

$$x_i = \sum_{S \subset N} \frac{|S \backslash \{i\}|!\,|N \backslash S|!}{|N|!} \left[\hat{c}(S) - \hat{c}(S \backslash \{i\})\right]$$

ou encore par :

$$x_i = \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \frac{|S|!\,(|N \backslash S| - 1)!}{|N|!} \left[\hat{c}(S \cup \{i\}) - \hat{c}(S)\right]$$

Le terme $\frac{|S|!\,(|N \backslash S|-1)!}{|N|!}$ est la probabilité que l'entité i fasse son entrée immédiatement après celles de S. Il y a en effet $|S|!$ arrangements possibles pour les entités de S et $(|N \backslash S| - 1)!$ pour celles qui suivent i, sur un total de $|N|!$ arrangements possibles. On a donc :

$$\sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \frac{|S|!\,(|N \backslash S| - 1)!}{|N|!} = 1$$

(IEN), (IDN), (MD), (MCN), (MCP), (PA), (APA), (CO), (ACO)

Si une entité est négligeable, on a $\hat{c}(S \cup \{i\}) - \hat{c}(S) = \hat{c}(\{i\})\ \forall S \subset N \backslash \{i\}$. On a donc $x_i = \hat{c}(\{i\})$, comme l'exige (IEN). On a donc également (IDN).

Dans la mesure où un accroissement de la demande d'une entité i est de nature à augmenter $\hat{c}(S \cup \{i\})$ sans changer $\hat{c}(S)$ pour tout $S \subset N \backslash \{i\}$, il s'ensuit que x_i ne peut diminuer suite à une telle augmentation, ce qui établit (MD). Par contre, si une entité $j \neq i$ accroit sa demande et qu'on est en présence d'économie d'échelles, $\hat{c}(S \cup \{i\}) - \hat{c}(S)$ ne peut augmenter selon (9). On a donc (MCN). Selon la Proposition 1, on a également (CO) et donc (PA). On a les propriétés inverses, i.e. (MCP), (APA), (ACO) sous les déséconomies d'échelle.

(O), (AD), (IDC), (SE), (PR), (MCT)

Cette règle ne faisant intervenir que les coûts, satisfait (O) à par le fait même. La satisfaction de (AD) est immédiate. En invoquant (IDN), on a donc également (IDC) et (SE) en vertu de la Proposition 2. Comme (SE) implique (PR), on ne peut avoir (MCT) en vertu de la Proposition 4. On en a une confirmation en utilisant les fonctions C et $\tilde{C}$ des exemples 13 et 15. Les répartitions pour les deux fonctions, selon la règle Shapley-Shubik, sont les suivantes :

	x_1	x_2	Total
C	0.75	2.25	3.00
$\tilde{C}$	0.87	2.22	3.09

Une augmentation des coûts entraîne une baisse de x_2 contrairement à ce qu'exige (MCT). Cet exemple n'invalide pas la condition plus faible de Young (1985b) puisqu'on a $\hat{c}(\{1,2\}) - \hat{c}(\{1\}) = 3 - 0.5 = 2.5 > 3.09 - 0.67 = 2.42 = \tilde{c}(\{1,2\}) - \tilde{c}(\{1\})$. Selon la condition de Young, la diminution de x_2 est justifiée, et s'impose même, du fait que son coût incrémental a diminué, même si son coût de faire cavalier seul et le coût total ont augmenté.

(RG), (TE), (S), (PS), (INP), (CH)

Supposons que la fonction de coûts soit symétrique par rapport aux demandes des entités i et j. On a alors $\hat{c}(S \cup \{i\}) - \hat{c}(S) = \hat{c}(S \cup \{j\}) - \hat{c}(S)\ \forall S \subset N \backslash \{i,j\}$ et $\hat{c}(N \backslash \{i\}) = \hat{c}(N \backslash \{j\})$, d'où $x_i = x_j$, ce qui établit que cette règle satisfait à (S) et donc à (TEE).

Par contre, on a violation de toutes les autres propriétés, comme le montre l'exemple 16. Avec $Q = (3,3,3)$, on a $x_1 > x_3$, en dépit du fait que $c_1(q_1) = c_3(q_3)$. Il s'agit d'une violation de (TE) et donc de (RG). Un accroissement de q_1 à 4 amène une augmentation de x_2, ce constitue une violation de (PS). Si on compare les répartitions des troisième et quatrième lignes, on observe l'inversion de l'ordre entre les contributions des entités 2 et 3, en violation de (INP).

$$C : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R} : C(Q) = q_1 + q_2 + q_1^2 q_2^{\frac{1}{2}} + q_3$$

Q	x_1	x_2	x_3	Total
$(3,3,3)$	10.79	10.79	3.00	24.59
$(4,3,3)$	17.86	16.86	3.00	37.71
$(3,3,8)$	10.79	10.79	8.00	29.59
$(0,3,8)$	0.00	3.00	8.00	11.00

– Exemple 16 –

Le même exemple, avec $Q = (3,3,3)$, montre que (CHF) et donc (CH) ne sont pas satisfaites par cette méthode. Imaginons en effet que l'entité 2 se retire après avoir payé son dû, i.e. 10.79. Le jeu de coût résiduel qui en résulte est défini par $\hat{c}(\{1\} = 10.79,\ \hat{c}(\{3\} = 0,\ \hat{c}(\{1,3\} = 13.80$. L'application de la règle Shapley-Shubik à ce jeu donne $x_1 = x_3 = 6.90$, contrairement à ce que prescrit (CHF).

D.3 Nucléole

Rappelons la définition de cette méthode. On désigne par $\mathcal{N}$ la famille des $(2^n - 2)$ sous-ensembles propres de N, i.e. différents de N et $\varnothing$. Étant donné une répartition $x = (x_1, \ldots x_n)$ et un sous-ensemble S non-vide de N et différent de N, on définit l'excédent de la coalition S avec la répartition x par :

$$e(x,S) = \hat{c}(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

et par $e(x)$ le vecteur des $(2^n - 2)$ valeurs de $e(x,S)$, pour $S \in \mathcal{N}$, ordonnées de la plus petite à la plus grande. Le nucléole est défini comme la répartition x^* qui maximise lexicographiquement $e(x)$:

$$e(x) \leq_\ell e(x^*) \text{ pour toute autre répartition } x$$

où $\leq_\ell$ désigne la relation «inférieure ou égale à au sens lexicographique».[10] Autrement dit, x^* est la répartition qui maximise le plus petit gain d'une coalition, de même que le deuxième plus petit gain, le troisième, etc. C'est aussi le point central, au sens géométrique, de l'ensemble des répartitions possibles.

(RG), (TE), (PS), (INP), (CH)

Dans l'exemple 16, la valeur de Shapley est également le nucléole. On a donc les mêmes conclusions en ce qui regarde (RG), (TE), (PS), (INP) et (CH), i.e. une violation de toutes ces conditions. Sobolev (1975) affirme que le nucléole est cohérent mais il s'agit d'une forme de cohérence plus faible que (CH). Voir l'annexe F et BMT (2002d) à ce sujet.

(O), (AD), (IDC)

Cette règle ne faisant intervenir que les coûts, satisfait à (O) par le fait même. Par contre, elle ne satisfait pas à l'additivité. Considérons l'exemple 17. On a deux fonctions de coût

[10] Un vecteur $e = (e_1, \ldots, e_m)$ est *lexicographiquement inférieur* à un autre $d = (d_1, \ldots, d_m)$ si la première composante de e différente de la composante correspondante de d est plus petite que cette dernière. Par exemple, $(3,1,9)$ est lexicographiquement plus petit que $(3,2,1)$.

et on donne les répartitions, selon le nucléole, pour ces deux fonctions de coût et pour leur somme. La troisième n'est pas la somme des deux premières, violant ainsi (AD).

$\hat{c}(\{1\}) = 5,$	$\hat{c}(\{2\}) = 6,$	$\hat{c}(\{3\}) = 7,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 11,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 12,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 10,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 15$	

$\hat{c}(\{1\}) = 6,$	$\hat{c}(\{2\}) = 7,$	$\hat{c}(\{3\}) = 4,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 12,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 9,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 10,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 15$	

x_1	x_2	x_3	Total
5.00	4.50	5.50	15
5.33	6.33	3.33	15
10.50	10.75	8.75	30

– Exemple 17 –

Cela n'empêche pas (IDC) d'être satisfaite. Supposons qu'on ait

$$C(Q) = \sum_{i=1}^{n} ca_i(Q) + cc(Q) = \sum_{i=1}^{n} ca_i\left(Q^{\{i\}}\right) + cc(Q)$$

et soit $x(Q, cc)$ une répartition de $cc(Q)$ selon le nucléole. Si, pour un i donné, on ajoute $ca_i(Q)$ à la fois à $cc(Q)$ et à toutes les répartitions possibles de $cc(Q)$, on laisse tous les vecteurs des excédents possibles $e(x, S)$ inchangés. Qu'on se rappelle que $ca_i\left(Q^{\{j\}}\right) = 0\ \forall j \neq i$. C'est dire que la répartition définie par $x_i(Q, C) = ca_i(Q) + x_i(Q, cc)$ est le nucléole du problème complet (Q, C).

(IEN), (IDN), (SE), (PR), (MCT)

Le nucléole satisfait à (IEN).

Démonstration. Supposons que i soit négligeable et montrons d'abord que $x_i(Q, C) = c_i(q_i)$. Pour ce faire, imaginons que $x_i(Q, C) < c_i(q_i)$. Comme $C(Q) = C\left(Q^{N\backslash\{i\}}\right) + c_i(q_i)$, on aurait $\sum_{j\neq i} x_j(Q, C) > C\left(Q^{N\backslash\{i\}}\right)$. Cette répartition serait clairement dominée, au sens lexicographique, par la répartition $x'(Q,C)$ définie par $x'_i(Q,C) = c_i(q_i)$ et $x'_j(Q,C) = x_j(Q,C) + \frac{1}{n-1}(x_i(Q,C) - c_i(q_i))$ $\forall j \neq i$, ce qui représente une contradiction.

Imaginons ensuite que $x_i(Q,C) > c_i(q_i)$ et que S soit le sous-ensemble pour lequel l'excédent $C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x_j(Q,C)$ soit le plus faible, i.e. le plus fortement négatif. On a alors $i \in S$ car, autrement, on aurait $C\left(Q^{S\cup\{i\}}\right) - \sum_{j\in S\cup\{i\}} x_j(Q,C) = C\left(Q^S\right) + c_i(q_i) - \sum_{j\in S} x_j(Q,C) < C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x_j(Q,C)$. Avec la répartition $x'(Q,C)$, on a $C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x_j(Q,C) < C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x'_j(Q,C)$. Si on a $C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x'_j(Q,C) \leq C\left(Q^T\right) - \sum_{j\in T} x'_j(Q,C)$ pour toute autre coalition T, on peut conclure que $x'(Q,C)$ domine $x(Q,C)$. Dans le cas contraire, on peut choisir $x'_i(Q,C) \in [c_i(q_i), x_i(Q,C)]$ de manière à ce que $C\left(Q^S\right) - \sum_{j\in S} x'_j(Q,C) \leq C\left(Q^T\right) - \sum_{j\in T} x'_j(Q,C)$ pour toute autre coalition T, de sorte que $x'(Q,C)$ domine $x(Q,C)$. On arrive ainsi à une contradiction.

Vérifions maintenant que, si $x(Q,C)$ appartient au nucléole du problème original, alors $x^{N\setminus\{i\}}(Q_{-i}, C_{-i})$ appartient au nucléole du problème obtenu avec l'élimination de l'entité i. Avec l'élimination de i, les composantes de $e(x,S)$ correspondant à des coalitions auxquelles appartient i sont éliminées pour donner $e_{-i}(x_{-i}, S)$ et les valeurs de toutes les autres restent inchangées. En particulier, la plus petite valeur de $e_{-i}(x_{-i}, S)$ est égale à la plus petite valeur de $e(x,S)$ puisque si i appartient à une coalition S pour laquelle la plus petite valeur de $e(x,S)$ est obtenue, la même valeur est obtenue avec la coalition $S\setminus\{i\}$. S'il y avait une répartition disons $x'_{-i}(Q,C)$ du problème réduit qui dominait $x_{-i}(Q,C)$, on pourrait en conclure que la répartition $x'(Q,C)$ obtenue en complétant $x'_{-i}(Q,C)$ par $x'_i(Q,C) = c_i(q_i)$ domine $x(Q,C)$ dans le problème original. ■

Comme corollaires, le nucléole satisfait à (IDN), (SE) et (PR). On ne peut donc avoir (MCT) en vertu de la Proposition 4. On peut utiliser à nouveau les fonctions C et $\tilde{C}$ des exemples 13 et 15 pour s'en convaincre. On avait obtenu les répartitions suivantes pour les deux fonctions, selon la règle Shapley-Shubik :

	x_1	x_2	Total
C	0.75	2.25	3.00
$\tilde{C}$	0.87	2.22	3.09

Or, le nucléole est en effet identique à la valeur de Shapley dans ce cas. Une augmentation des coûts entraîne une baisse de x_2 contrairement à ce qu'exige (MCT).

(MD), (MCN), (MCP), (PA), (APA), (CO), (ACO)

Lorsque le coeur existe, il existe au moins une répartition dont le surplus est non-négatif. Comme on cherche à maximiser le plus petit des surplus des coalitions avec le nucléole, il est clair que ce dernier appartient au coeur lorsque ce dernier existe, ce qui est le cas en présence d'économies d'échelle. Les propriétés (CO) et (PA) sont donc satisfaites. On peut en dire autant de (ACO) et (APA) en présence de déséconomies d'échelle.

La propriété (MCN) n'est pas pour autant satisfaite, même en présence d'économies d'échelle. C'est ce que montre l'exemple 18, qui utilise la fonction de coût de l'exemple 5. Cette dernière est concave, elle satisfait à (10) et elle est compatible avec (9). Comme dans l'exemple 5, la deuxième répartition correspond à une augmentation de 3$ pour $\hat{c}(\{3\})$ et $\hat{c}(\{1,3\})$ et de 2$ pour $\hat{c}(2,3)$ et $\hat{c}(\{1,2,3\})$, suite à un accroissement de la demande de l'entité 3. Ce changement entraîne une augmentation de la contribution de l'entité 1, contrairement à ce que prescrit (MCN).[11]

$\hat{c}$: comme dans l'exemple 5

x_1	x_2	x_3	Total
3.00	4.00	5.00	12
3.33	3.33	7.33	14

– Exemple 18 –

La propriété (MCP) n'est pas satisfaite non plus, même avec une fonction $\hat{c}$ convexe qui satisfait à l'inverse (10) et des changements qui sont compatibles avec l'inverse de (9). C'est ce que montre l'exemple 19. La deuxième répartition résulte d'une augmentation de 1$ pour $\hat{c}(\{3\})$ et $\hat{c}(\{2,3\})$ et de 3$ pour $\hat{c}(1,3)$ et $\hat{c}(\{1,2,3\})$, suite à un accroissement de la demande de l'entité 3. La contribution de l'entité 2 diminue contrairement à ce qu'exige (MCP).

La violation de (MCN) met (MD) en péril. Effectivement, le nucléole ne satisfait pas à (MD), du moins dans les problèmes où il y a au moins cinq entités. On vient de montrer que le nucléole satisfait à (CO). Or, en utilisant un exemple avec cinq entités où le coeur se réduit à un singleton[12] donc au nucléole, Young (1994) montre qu'on n'a pas nécessairement $x_i(Q,C) \leq x_i(Q,C')$ lorsque $C\left(Q^S\right) \leq C'\left(Q^S\right)\ \forall S \subset N$ et $C\left(Q^S\right) = C'\left(Q^S\right)\ \forall S \subset N\backslash\{i\}$.[13] Un accroissement de la demande de l'entité i donne précisément ce genre d'ac-

[11] La première répartition est également celle qu'avait donnée la méthode des bénéfices résiduels. C'est aussi celle que donne la règle Shapley-Shubik. Après la modification des coûts, la règle Shapley-Shubik donne une répartition différente du nucléole soit $(3, 3.5, 7.5)$.

[12] Cet exemple est exposé en détail dans BMT (2002d).

[13] En termes des fonctions $\hat{c}$ et $\hat{c}'$ correspondantes, $\hat{c}(S) \leq \hat{c}'(S)\ \forall S \subset N$ et $\hat{c}(S) = \hat{c}'(S)\ \forall S \subset N\backslash\{i\}$.

$\hat{c}(\{1\}) = 6,$	$\hat{c}(\{2\}) = 5,$	$\hat{c}(\{3\}) = 7,$
$\hat{c}(\{1,2\}) = 11,$	$\hat{c}(\{1,3\}) = 13,$	$\hat{c}(\{2,3\}) = 12,$
	$\hat{c}(\{1,2,3\}) = 19$	

x_1	x_2	x_3	Total
6.33	5.33	7.33	19
7.5	5.0	9.5	22

QTOcaption

– Exemple 19 –

croissement dans les coûts. Cette exemple démontre donc que le nucléole ne satisfait pas à (MD).

E Démonstrations relatives à la répartition séquentielle

On commence par le contexte général dans la mesure où les propriétés qui sont satisfaites dans ce contexte le sont également dans le contexte unidimensionnel.

E.1 Règle séquentielle radiale

(RG), (TE), (PSR), (INP), (OR), (MDR), (MCNR), (PA), (APA), (CO), (ACO)

Les propriétés (TE) et (PSR) caractérisent (définissent) la règle séquentielle radiale, comme l'ont montré Koster, Tijs et Borm (1998). La préservation des rangs (RG) découle de la définition même de la règle et plus précisément du fait que les agents sont ordonnés selon leurs coûts de faire cavalier seul. Les parts des coûts ne peuvent ensuite qu'augmenter à mesure qu'on passe d'une entité à une autre dont le coût de faire cavalier seul est plus élevé.

Téjédo et Truchon (2000) démontrent que la règle séquentielle radiale satisfait aux propriétés (INP), (OR) et (MDR). Téjédo et Truchon (2001) montrent que cette même règle satisfait à (MCNR), (PA) et (CO), en présence d'économies d'échelle et aux propriétés inverses, (MCPR), (APA) et (ACO), en présence de déséconomies d'échelle.

(IDN), (IEN), (IDC), (AD), (SE)

Téjédo et Truchon (2000) démontrent que la règle séquentielle radiale satisfait à (IDN) et à (SE). Par contre, (IEN), qui est plus forte que (IDN) et (SE), n'est pas satisfaite. Supposons, par exemple, que l'entité 1 est négligeable. En vertu de (IEN), on devrait avoir $x_1 = \dfrac{C\left(Q^1\right)}{n} = c_1\left(q_1\right)$, où Q^1 est un vecteur de demandes $\left(q_1^1, q_2^1, \ldots, q_n^1\right)$ tel que $c_j\left(q_j^1\right) = c_1\left(q_1\right)\ \forall j$. La condition $\dfrac{C\left(Q^1\right)}{n} = c_1\left(q_1\right)$ peut donc encore s'écrire $C\left(Q^1\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j\left(q_j^1\right)$. Cette dernière égalité n'est pas vraie de façon générale. Quand elle l'est, on a $x_1 = c_1\left(q_1\right)$ en vertu de (SE). Comme (IEN) n'est pas vérifiée, les conditions plus fortes que sont (IDC) et (AD) ne le sont pas non plus.

(CHF), (CH)

La règle séquentielle radiale satisfait à la cohérence faible (CHF).

Démonstration. Supposons que les k plus petites entités, en termes des $c_i\left(q_i\right)$, se retirent après avoir payé leur dû selon la règle séquentielle radiale. Elles forment le sous-ensemble K. La répartition séquentielle est définie par :

$$x_i(Q, C) = \sum_{j=1}^{i} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j}, \ i = 1, \ldots n$$

Pour les entités au delà de k, i.e. celles de K, on peut décomposer la formule comme suit :

$$x_i(Q, C) = \sum_{j=1}^{k} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} + \frac{C\left(Q^{k+1}\right) - C\left(Q^k\right)}{n-k} + \sum_{j=k+2}^{i} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j}, \quad i = k+1, \ldots n \tag{15}$$

Le dernier terme de cette décomposition est évidemment nul pour $i = k+1$. Soit $X_k\left(Q, C\right) = \sum_{j=1}^{k} x_j\left(Q, C\right)$. On a :

$$\begin{aligned}
X_k\left(Q, C\right) &= \sum_{j=1}^{k} (k+1-j) \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} = \sum_{j=1}^{k} (k+1-j) \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} (n-k) \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} - (n-k) \sum_{j=1}^{k} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} \\
&= \sum_{j=1}^{k} C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right) - (n-k) \sum_{j=1}^{k} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} \\
&= C\left(Q^k\right) - (n-k) \sum_{j=1}^{k} \frac{C\left(Q^j\right) - C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j}
\end{aligned}$$

De cette série d'égalités, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{C\left(Q^{j}\right)-C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j}=\frac{C\left(Q^{k}\right)-X_{k}(Q, C)}{n-k} \tag{16}$$

Par définition, $C^{N \backslash K}\left(Q_{N \backslash K}\right)=C(Q)-X_{k}(Q, C)$ si bien que $C^{N \backslash K}\left(Q_{N \backslash K}^{k+1}\right)=C\left(Q^{k+1}\right)-X_{k}(Q, C)$. De même, $C\left(Q^{j}\right)-C\left(Q^{j-1}\right)=C^{N \backslash K}\left(Q_{N \backslash K}^{j}\right)-C^{N \backslash K}\left(Q_{N \backslash K}^{j-1}\right)$ et $Q_{N \backslash K}^{k}=0$. En substituant le membre droit de (16) au premier terme du membre gauche de (15), on obtient donc :

$$\begin{aligned}
x_{i}(Q, C) & =\frac{C\left(Q^{k+1}\right)-X_{k}(Q, C)}{n-k}+\sum_{j=k+2}^{i} \frac{C\left(Q^{j}\right)-C\left(Q^{j-1}\right)}{n+1-j} \\
& =\frac{C^{N \backslash K}\left(Q_{N \backslash K}^{k+1}\right)}{n-k}+\sum_{j=k+2}^{i} \frac{C^{N \backslash K}\left(Q_{N \backslash K}^{j}\right)-C^{N \backslash K}\left(Q_{N \backslash K}^{j-1}\right)}{n+1-j} \\
& =\sum_{j=k+1}^{i} \frac{C^{N \backslash K}\left(Q_{N \backslash K}^{j}\right)-C^{N \backslash K}\left(Q_{N \backslash K}^{j-1}\right)}{n+1-j}, \ i=k+1, \ldots n
\end{aligned}$$

■

L'hypothèse que K est formé des k plus petites entités, en termes des $c_{i}\left(q_{i}\right)$, est cruciale dans la démonstration précédente. Elle ne tient évidemment pas avec un ensemble K quelconque, invalidant de ce fait (CH).

E.2 Règle séquentielle originale

Dans le contexte unidimensionnel, les propriétés (OR), (MDR) et (MCNR) deviennent (O), (MD), (MCN). Ces dernières sont donc automatiquement satisfaites dans ce contexte. Aux propriétés satisfaites par la règle radiale, s'ajoutent (GR) et (AD). En vertu de la Proposition 2, on a donc également (IDC) et (IEN) mais, en fait, (IDC) est satisfaite de façon triviale dans le contexte unidimensionnel et homogène et (IEN) se confond avec (SE) et (PR). En effet, si la fonction de coût est de la forme $C(Q)=c\left(\sum_{j=1}^{n} q_{j}\right)$, on ne peut identifier de coûts comme étant spécifiques aux entités. De même, une entité ne saurait être négligeable à moins que c ne soit linéaire. Dans un tel cas, (PR) impose $x_{i}=c_{i}\left(q_{i}\right)$. C'est la raison pour laquelle (IDC) et (IEN) n'apparaissent pas dans la liste des propriétés satisfaites par cette règle.

F Sur la cohérence

La propriété de cohérence implique une fonction de coût résiduel. On peut écrire celle qui a été retenue dans ce document comme suit. Étant donné une règle de partage x, un problème (Q, C) et un sous-ensemble d'entités $T \subset N$, définissons $m_T = \sum_{i \in T} m_i$ et la fonction de coût résiduelle $C^T : \mathbb{R}_+^{m_T} \to \mathbb{R}$ par :

$$C^T(Y_T) = \max\left\{C\left(Y^T + Q^{N \backslash T}\right) - \sum_{j \in N \backslash T} x_j(Q, C),\ 0\right\}$$

Soit maintenant un $S \subset T$ et Y_T^S la demande obtenue de Y_T en annulant les composantes d'indices $i \in T \backslash S$. On a évidemment :

$$C^T\left(Y_T^S\right) = \max\left\{C\left(Y^S + Q^{N \backslash T}\right) - \sum_{j \in N \backslash T} x_j(Q, C),\ 0\right\}$$

En particulier, pour $Y_T = Q_T$, on a :

$$C^T\left(Q_T^S\right) = C\left(Q^{S \cup N \backslash T}\right) - \sum_{j \in N \backslash T} x_j(Q, C)$$

En termes de jeu, on a :

$$\hat{c}^T(S) = \hat{c}(S \cup N \backslash T) - \sum_{j \in N \backslash T} x_j(N, \hat{c})$$

ce qui est exactement la définition de Hart et Mas-Colell (1989).

La définition de Young (1994) est :

$$\hat{c}_Y^T(S) = \min_{S' \subset N \backslash T}\left(\hat{c}(S \cup S') - \sum_{j \in S'} x_j(N, \hat{c})\right)$$

C'est aussi celle qui est donnée dans BMT (2002d). Selon cette définition, la coalition $S \subset T$ est libre de choisir la coalition $S' \subset N \backslash T$ dont elle produira la demande et encaissera les contributions. On a bien sûr $\hat{c}_Y^T(S) \leq \hat{c}^T(S)$. Soit $S^*(T)$ le S' pour lequel le minimum est atteint dans la définition de $\hat{c}_Y^T(S)$. On a également $\hat{c}_Y^T(S^*(T)) = \hat{c}^T(S^*(T))$.

Young met des restrictions sur les valeurs possibles de $\hat{c}_Y^T$ par rapport à $\hat{c}^T$. Il se peut en effet qu'on ait $S^*(T) = S^*(T')$ pour $T \neq T'$. Sa condition de cohérence est donc moins forte que la nôtre.

Références

Aumann, R.J. et L.S. Shapley, 1974. *Values of Non-Atomic Games*, Princeton, NJ : Princeton University Press.

Biddle, G.C. et R. Steinberg, 1985. "Common Cost Allocation in the Firm," in *Cost Allocation : Methods, Principles, Applications*, ed. by H. P. Young, North Holland, 31-54.

Boyer, M., Moreaux, M. et M. Truchon 2002a. "Le partage des coûts communs : enjeux, problématique et pertinence", CIRANO 2002RP-17.

Boyer, M., M. Moreaux, et M. Truchon, 2002b. "Les méthodes de partage de coûts : un survol", CIRANO 2002RP-18.

Boyer, M., M. Moreaux, et M. Truchon, 2002c. "Les jeux de coûts : définitions et propriétés souhaitables des solutions", CIRANO 2002RP-20.

Boyer, M., Moreaux, M. et M. Truchon, 2002d. "Les jeux de coûts : principaux concepts de solution", CIRANO 2002RP-21.

Balanchandran, B. et Ramakrishnan, 1981. "Joint Cost Allocation : a Unified Approach," *Accounting Revie*w, 56, 85-96.

Friedman, E. et H. Moulin, (1999). "Three Methods to Share Joint Costs or surplus", *Journal of Economic Theory,* 87, 275-312.

Gangolly, J.S., 1981. "On Joint Cost allocation : Independent Cost Proportional Scheme (ICPS) et its Properties," *Journal of Accounting Research*, 19, 299-312.

Hart, S. et A. Mas-Colell, 1989. "Potential, Value and Consistency," *Econometrica*, 57, 589-614.

Koster M., Tijs S., et Borm P, 1998. "Serial Cost Sharing Methods for Multicommodity Situations," *Mathematical Social Science*, 36, 229-242.

Louderback, J.G., 1976. "Another Approach to Allocating Joint Costs : A Comment," *Accounting Review*, 50, 683-85.

Mirman, L.J., D. Samet et Y. Tauman, 1983 " An Axiomatic Approach to the Allocation of a Fixed Cost through Prices," *Bell Journal of Economics*, 14, 139-151.

Moriarity, S., 1975. "Another Approach to Allocating Joint Costs," *Accounting Review*, 49, 791-795.

Moulin, H. et S. Shenker, 1992. "Serial Cost Sharing," *Econometrica*, 50, 5, 1009-1039.

Moulin, H. et S. Shenker, 1994. "Average Cost Pricing Versus Serial Cost Sharing : an axiomatic comparison," *Journal of Economic Theory*, 64, 1, 178-201.

Moulin, H., 1999. "Incremental Cost Sharing : Characterization by Strategyproofness," *Social Choice and Welfare*, 16, 279-320.

Okada, N., 1985. "Cost Allocation in Multipurpose Reservoir Developmemt : The Japanese Experience," in *Cost Allocation : Methods, Principles, Applications*, ed. by H.P. Young, North Holland, 3-29.

Ransmeier, J.S., 1942. *The Tennessee Valley Authority : A Case Study in the Economics of Multiple Purpose Stream Planning*, Nashville, TN : Vanderbilt University Press.

Schmeidler. D., 1969. "The Nucleolus of a Characteristic Function Game," *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17, 1163-1170.

Shapley, L.S., 1953. "A Value for n-Person Games," in Kuhn, H., et A.W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Princeton : Princeton University Press, 307-317.

Shenker, S., 1990. "Making Greed Work in Netwoks : A Game-Theoretic Analysis of Gateway Service Disciplines," Mimeo, Xerox Research Center, Palo Alto.

Shubik, M., 1962. "Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Joint Costs and Internal Pricing," *Management Science*, 8, 325-43.

Sobolev, A.I., 1975. "Characterization of the Principle of Optimality for Cooperative Games through Functional Equations," in N.N. Voroby'ev, ed. *Mathematical Methods in Social Sciences*, Vipusk 6, Academy of Sciences of the Lithuanian SSR, Vilnius, 92-151.

Sprumont, Y., 1998. "Ordinal cost sharing," *Journal of Economic Theory*, 81, 126-162.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2000. "Serial Cost Sharing with Many Goods and General Aggregation," Cahier de recherche 0007, Département d'économique, Université Laval.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2001. "Monotonicity and Bounds for Cost Share under the Path Serial Rule," Cahier de recherche 0203, Département d'économique, Université Laval.

Téjédo, C. et M. Truchon, 2002. "Serial Cost Sharing in Multidimensional Centexts," *Mathematical Social Sciences*, 44, 277-299.

Young, H.P., 1985a. "Producer Incentives in Cost Allocation," *Econometrica,* 53, 757-65.

Young, H.P., 1985b. "Monotonicity in Cooperative Games," *International Journal of Game Theory,* 13, 65-72.

Young, H.P., 1994. "Cost Allocation", in R.J.Aumann et S. Hart, eds, *Handbook of Game Theory, Vol. II,* Amsterdam : North Holland, Chap. 34, 1191-1235.

Wang, Y.T., 2002. "Proportionally Adjusted Marginal Pricing Method to Share Join Costs," *Review of Economic Design,* 7, 205-211.

Documents * CIRANO *
sur
Le partage des coûts communs et la tarification des infrastructures
http ://www.cirano.qc.ca/publications/
****

[1] 2002RP-17 Le partage des coûts communs : enjeux, problématique et pertinence

[2] 2002RP-18 Les méthodes de partage de coûts : un survol

[3] 2002RP-19 Les méthodes de partage de coûts : propriétés

[4] 2002RP-20 Les jeux de coûts : définitions et propriétés souhaitables des solutions

[5] 2002RP-21 Les jeux de coûts : principaux concepts de solution

[6] 2003RP-04 Le cas des réseaux municipaux souterrains

[7] 2003RP-05 Partage des coûts dans l'entreprise et incitations

[8] 2003RP-06 Tarification optimale des infrastructures communes